ZUZANA PRÁŠKOVÁ
PETR LACHOUT

ZÁKLADY NÁHODNYCH PROCESŮ

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
NAKLADATELSTVÍ KAROLINUM
PRAHA 2001

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze

Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.

ISBN 80-7184-688-0

Předmluva

Tento text obsahuje učební látku v rozsahu zimního semestru předmětu M031 Náhodné procesy v současnosti přednášeného na MFF UK a je věnován převážně Markovovým řetězcům s diskrétním a spojitým časem. Předpokládá určité znalosti z teorie pravděpodobnosti, nejlépe v rozsahu zimního semestru přednášky M086 Teorie pravděpodobnosti, bez větších potíží však bude bude srozumitelný i těm, kteří absolvovali jiný základní kurs teorie pravděpodobnosti založený na teorii míry.

Výklad je členěn do kapitol a podkapitol; kromě příkladů uváděných v textu jsou za každou kapitolou uvedena cvičení, která slouží k dalšímu pochopení a procvičování látky. Kromě toho jsou k textu připojeny dva dodatky, ve kterých je přehledně vysvětlen matematický aparát, který při výkladu používáme, nebo na který odkazujeme.

Autoři

OBSAH

0.1. *Použité značení*

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}_+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$I(A)$	indikátor jevu A
$F * G$	konvoluce distribučních funkcí
$\boldsymbol{p}$	sloupcový vektor
$\boldsymbol{A}$	matice
$\boldsymbol{p}^T$	transponovaný vektor

Tento text byl vytištěn typografickým systémem $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1. ÚVOD

1.1. Definice a základní charakteristiky náhodného procesu

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy z teorie náhodných procesů.

Definice. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá *náhodný proces.*

V případě, že $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $T = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, mluvíme o *procesu s diskrétním časem* nebo o *časové řadě.* Pokud $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, říkáme, že $\{X_t, t \in T\}$ je *proces se spojitým časem.* Někdy, pokud bude ze souvislosti jasné, o jakou množinu T se jedná, budeme symbol $t \in T$ pro zjednodušení vynechávat a náhodný proces označovat symbolem $\{X_t\}$.

Dvojice $(S, \mathcal{E})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{E}$ je $\sigma-$algebra podmnožin S, se nazývá *stavový prostor* procesu $\{X_t, t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o *proces s diskrétními stavy,* nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o *procesu se spojitými stavy.*

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ můžeme chápat jako funkci dvou proměnných ω, t. Pro pevné $t \in T$ je $X_t = X_t(.)$ náhodná veličina definovaná na Ω ; pro pevné $\omega \in \Omega$ je $X_{(.)} = X_{(.)}(\omega)$ reálnou funkcí jen proměnné t. Této funkci říkáme *trajektorie procesu* $\{X_t, t \in T\}$.

Každé konečné podmnožině $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ lze přiřadit systém náhodných veličin $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$, které mají sdružené rozdělení s distribuční funkcí

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$ má systém distribučních funkcí $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$ následující vlastnosti:

a) Pro libovolnou permutaci $i_1, \dots, i_n$ čísel $1, \dots, n$ platí

$$F_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

b)

$$\lim_{x_{n+1}\to\infty} F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n).$$

Systém distribučních funkcí s vlastnostmi $a)$ a $b)$ se nazývá *konzistentní*. Ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí. Naopak platí

Věta 1.1 (Kolmogorov). *Nechť $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Potom existuje náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná $t_1,\dots,t_n \in T$ a libovolná reálná $x_1,\dots,x_n$ platí*

$$P(X_{t_1} \le x_1,\dots,X_{t_n} \le x_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n).$$

Důkaz. Štěpán (1987), věta I.10.3.

Rozdělení náhodného procesu je tedy jednoznačně určeno rozdělením všech konečněrozměrných náhodných vektorů $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$.

Definice. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota EX_t. Potom funkce $\mu_t = EX_t$ definovaná na T se nazývá *střední hodnota procesu* $\{X_t\}$. Jestliže platí $E|X_t|^2 < \infty$ pro všechna $t \in T$, potom funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$ předpisem $R(s,t) = E(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)$ se nazývá *autokovarianční funkce procesu* $\{X_t\}$. Hodnota $R(t,t)$ se nazývá *rozptyl procesu* v čase t.

Definice. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je *striktně stacionární*, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná $x_1,\dots,x_n$ a pro libovolná $t_1,\dots,t_n$ a h taková, že $t_k \in T, t_k + h \in T, 1 \le k \le n$ platí

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1,\dots,x_n).$$

Z definice striktní stacionarity procesu plyne např., že všechny náhodné veličiny X_t mají stejné rozdělení a dále, že základní charakteristiky jako střední hodnota a autokovarianční funkce se nemění při posunutí v čase.

Poznámka. Od pojmu striktní stacionarita je třeba odlišit slabší pojem *stacionarita do momentů druhého řádu*, též *slabá stacionarita*, který je definován pro procesy s konečnými druhými momenty a předpokládá střední hodnotu konstantní v čase a autokovarianční funkcí $R(s,t)$, která je funkcí pouze rozdílu argumentů $t - s$.

$\{X_t, t \in T\}$ je NP na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$EX_t^2 < \infty \ \forall t \in T$
NP je slabo stacionárny ak $EX_t = \mu \ \forall t \in T$
a ďalej $R(s,t)$ je func. iba $s-t$

Definice. Nechť $\{X_t, t \in T\}, \{Y_t, t \in T\}$ jsou náhodné procesy definované na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s hodnotami ve stejném stavovém prostoru $(S, \mathcal{E})$. Jestliže platí pro každé $t \in T$

$$P(X_t = Y_t) = P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1,$$

říkáme, že procesy $\{X_t\}, \{Y_t\}$ jsou *stochasticky ekvivalentní*. Jestliže $\{X_t\}$ je stochastický proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a proces $\{Y_t\}$ je stochasticky ekvivalentní s $\{X_t\}$, říkáme, že $\{Y_t\}$ je *stochastickou verzí* procesu $\{X_t\}$.

Procesy, které jsou stochasticky ekvivalentní, mají stejné rozdělení, neboť mají stejná všechna konečněrozměrná rozdělení: pro libovolné $n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in T$ a libovolná reálná $x_1, \ldots, x_n$ je totiž

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n) &= P(X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n, X_{t_1} = Y_{t_1}, \ldots X_{t_n} = Y_{t_n}) \\ &= P(Y_{t_1} \le x_1, \ldots, Y_{t_n} \le x_n). \end{aligned}$$

Poznámka. Procesy, které jsou stochasticky ekvivalentní, nemusí mít stejné trajektorie. Nechť např. $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ je $\sigma-$algebra borelovských podmnožin $[0,1]$ a P je Lebesgueova míra na $[0,1]$, nechť $T = [0,1]$. Uvažujme procesy $\{X_t, t \in T\}$ a $\{Y_t, t \in T\}$ definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ předpisem

$$X_t(\omega) = 0, \quad \omega \in \Omega,\ t \in T$$

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & t \neq \omega, \\ 1 & t = \omega. \end{cases}$$

Potom pro každé $t \in T$

$$P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = P(\omega : \omega \neq t) = 1,$$

takže procesy $\{X_t\}, \{Y_t\}$ jsou stochasticky ekvivalentní, ale jejich trajektorie jsou odlišné.

Definice. Proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá *stochasticky spojitý (spojitý podle pravděpodobnosti)* v bodě $t_0 \in T$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to t_0} P(|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon) = 0.$$

Proces je stochasticky spojitý, je-li stochasticky spojitý v každém bodě T.

Poznámka. Proces, který je spojitý podle předchozí definice, nemusí mít spojité trajektorie. Uvažujme např. posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{T_k, k \geq 1\}$ se spojitou distribuční funkcí $F(t) = P(T_k \leq t)$ a definujme proces $\{X_t, t \geq 0\}$ předpisem

MARKOV'S INEQUALITY $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} I(T_k \leq t), \quad t \geq 0,$$

kde $I(A)$ značí indikátor jevu A a $n \geq 1$ je nějaké přirozené číslo. Zřejmě je $0 \leq X_{t_1} \leq X_{t_2}$ pro každé $0 \leq t_1 < t_2$. Trajektorie procesu $\{X_t, t \geq 0\}$ jsou neklesající schodovité funkce se skoky v bodech $T_{(1)} < \cdots < T_{(n)}$, kde $T_{(1)}, \ldots T_{(n)}$ jsou pořádkové statistiky $T_1, \ldots, T_n$. Proces sám však je stochasticky spojitý, neboť podle Markovovy nerovnosti pro každé $h > 0$ a $\varepsilon > 0$

$$P(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E|X_{t+h} - X_t| = \frac{n}{\varepsilon} EI(t < T_1 \leq t + h) = \frac{n}{\varepsilon}(F(t+h) - F(t))$$

a vzhledem ke spojitosti distribuční funkce F poslední výraz konverguje k nule při $h \to 0_+$; podobně $P(|X_{t-h} - X_t| > \varepsilon) \to 0$ při $h \to 0_+$.

Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; pro každé $t \in T$ tedy zobrazení $X_t(.) : \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{A}$–měřitelné, t.j. $\{\omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ pro každou borelovskou podmnožinu $B \subset \mathbb{R}$. V případě, že T není spočetná, však množiny

$$\{\omega : X_t(\omega) \in B, t \in T\} = \bigcap_{t \in T} \{\omega : X_t(\omega) \in B\}$$

nejsou obecně v $\mathcal{A}$; tedy je-li $\{X_t, t \in T\}$ proces se spojitým časem, takové funkcionály jako např. $\sup_{t \in T} X_t$, $\inf_{t \in T} X_t$ nemusí být náhodné veličiny. To nás vede k definici separabilního procesu.

Definice. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$, kde $T \subset \mathbb{R}$ je interval, se nazývá *separabilní*, jestliže existuje spočetná hustá podmnožina $D \subset T$ a jev $A \subset \Omega$ s nulovou pravděpodobností tak, že

$$\{\omega : X_t(\omega) \in C, t \in J \cap D\} - \{\omega : X_t(\omega) \in C, t \in J \cap T\} \subset A$$

pro libovolnou uzavřenou množinu $C \subset \mathbb{R}$ a libovolný otevřený interval $J \subset T$. Spočetná množina D se nazývá *separant* procesu $\{X_t\}$.

Vzhledem k tomu, že

$$\{\omega : X_t(\omega) \in C, t \in J \cap D\} \supset \{\omega : X_t(\omega) \in C, t \in J \cap T\},$$

plyne z definice separability, že

$$\Lambda^c \cap \{\omega : X_t(\omega) \in C, t \in J \cap D\} = \Lambda^c \cap \{\omega : X_t(\omega) \in C, t \in J \cap T\},$$

a protože na levé straně je jev z $\mathcal{A}$ (zde Λ^c je doplněk Λ), je i pravá strana jev z $\mathcal{A}$. Pojem separability procesu umožňuje tudíž redukovat studium jisté vlastnosti V, která se vztahuje ke všem hodnotám $t \in T$, na studium této vlastnosti jen pro spočetně mnoho hodnot t.

Poznámka. Je-li $\{X_t, t \in T\}$ separabilní proces a Λ, D mají stejný význam jako v předchozí definici, lze ukázat, že pro každé $\omega \in \Lambda^c, t \in T$ existuje posloupnost $\{t_n, n \in \mathbb{N}\} \subset D$ a $t_n \to t$ při $n \to \infty$ taková, že

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) .$$

Někdy se proto pojem separability definuje tímto ekvivalentním způsobem (Štěpán (1987)).

Definice. Reálný stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá *měřitelný*, jestliže zobrazení $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T-$ měřitelné, kde $\mathcal{B}_T$ je $\sigma-$algebra borelovských podmnožin T a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$ značí součinovou $\sigma-$algebru.

V dalších kapitolách využijeme následující tvrzení.

Věta 1.2. *Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je reálný stochasticky spojitý proces a $T \subset \mathbb{R}$ je kompaktní interval. Potom existuje verze procesu, která je separabilní a měřitelná.*

Důkaz. Štěpán (1987), 1.10.14.

1.2. Příklady náhodných procesů

Příklad 1.1. *Bílý šum* je proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a stejným konečným rozptylem. Pokud náhodné veličiny X_t jsou nezávislé, mluvíme o striktním bílém šumu. Název je odvozen ze spektrálních vlastností tohoto procesu a analogie s fyzikálními vlastnostmi bílého světla.

Příklad 1.2. *Náhodná procházka na přímce.* Nechť $Y_1, Y_2, \dots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny nabývající hodnot ± 1 s pravděpodobnostmi $1/2$. Definujme $X_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ položme $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$. Náhodná veličina X_n potom udává polohu, kterou má po n krocích částice, jež se náhodně pohybuje po celočíselných bodech na přímce, ve všech krocích se stejnou pravděpodobností v obou možných směrech. Posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá náhodná procházka. Obecněji se jako náhodná procházka definuje součet libovolných nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin.

Příklad 1.3. *Galtonův-Watsonův proces větvení* je náhodná posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, která udává počet jedinců v generacích $n = 0, 1 \dots$. Předpokládá se, že z každého jedince $n-$té generace, $n \geq 0$, vzniká v další generaci náhodný počet potomků. Počty těchto potomků mají stejné rozdělení a jsou nezávislé mezi sebou a na předchozím průběhu procesu. Za předpokladu, že v nulté generaci je jeden jedinec, lze vyjádřit počet potomků $n-$ té generace jako $X_n = U_{n1} + \dots + U_{nX_{n-1}}$, kde $U_{n1}, U_{n2}, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny stejně rozdělené jako X_1, nezávislé na $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0$.

Příklad 1.4. *Poissonův proces.* Sledujeme výskyt nějakých událostí v časovém intervalu $[0, t]$, např. počet částic, které registruje Geigerův-Müllerův čítač, počet hovorů, které přicházejí do telefonní ústředny, nebo počet pojistných událostí evidovaných nějakou pojišťovnou. Předpokládáme přitom, že v intervalu $(t, t+h]$, a to nezávisle na t, dojde k výskytu jedné události s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, více než jedné události s pravděpodobností $o(h)$, a že počty událostí, které se vyskytnou v disjunktních časových intervalech, jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Symbol $o(h)$ zde znamená, že $o(h)/h \to 0$ při $h \to 0_+$ a λ je kladná konstanta.

Nechť N_t značí počet událostí v intervalu $[0, t]$. Potom $\{N_t, t \geq 0\}$ je náhodný proces, který se nazývá Poissonův. Za předpokladů, které jsme uvedli výše, platí, že počty událostí N_t mají Poissonovo rozdělení s parametrem λt,

$$P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Konstanta λ se nazývá *intenzita Poissonova procesu.*

Příklad 1.5. *Wienerův proces (Brownův pohyb)* je náhodný proces $\{W_t, t \geq 0\}$, který má tyto vlastnosti:

(1) $W_0 = 0$ a $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.
(2) Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ jsou přírůstky procesu $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny.

(3) Pro libovolné $0 \leq t < s$ mají přírůstky $W_s - W_t$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(s-t)$, kde σ^2 je kladná konstanta.

Wienerův proces, který byl původně odvozen pro popis pohybu malých částic v kapalině jako výsledek nárazů molekul, je aplikován v kvantové mechanice, slouží pro popis difuzních modelů a hraje důležitou roli v moderní teorii náhodných procesů a v asymptotické statistice.

Striktní bílý šum z příkladu 1.1 a procesy z ostatních příkladů patří do rozsáhlé třídy náhodných procesů, tzv. *Markovových procesů*. V dalších kapitolách probereme dvě důležité skupiny Markovových procesů, totiž Markovovy procesy s diskrétními stavy a diskrétním časem (*Markovovy řetězce s diskrétním časem*) a Markovovy procesy s diskrétními stavy a spojitým časem (*Markovovy řetězce se spojitým časem*) a uvedeme některé jejich aplikace.

1.3. Cvičení a doplňky

Cvičení 1.1. Nechť X je náhodná veličina, která má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, \pi]$. Definujme náhodný proces $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$ předpisem

$$Y_t = t + \cos(tX), \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Spočtěte střední hodnotu a autokovarianční funkci procesu $\{Y_t\}$.

Cvičení 1.2. Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Dokažte, že $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je striktně stacionární proces.

Cvičení 1.3. Nechť X je náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem σ^2. Definujme náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ předpisem $X_t = (-1)^t X$. Ukažte, že $\{X_t\}$ je slabě stacionární. Je také striktně stacionární?

Cvičení 1.4. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, kde $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ je σ-algebra borelovských podmnožin $[0, 1]$ a P je Lebesgueova míra na $[0, 1]$. Označme $T = [0, 1]$ a na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definujme náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ předpisem

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0, & t = \omega, \\ 1, & t \neq \omega. \end{cases}$$

Ukažte, že $\{X_t\}$ není separabilní.

Návod: Nechť Γ je podmnožina T. Potom

$$\{\omega : X_t(\omega) = 0, t \in \Gamma\} = \{\omega : \omega \neq t, t \in \Gamma\} = [0,1] - \Gamma$$

(nakreslete si obrázek), tedy

$$P\{\omega : X_t(\omega) = 0, t \in \Gamma\} = 1 - P(\Gamma) .$$

Nechť nyní $J \subset [0,1]$ je libovolný otevřený interval a nechť D je množina racionálních čísel z $[0,1]$. Potom

$$P\{\omega : X_t(\omega) = 0, t \in J\} = 1 - P(J) ,$$

$$P\{\omega : X_t(\omega) = 0, t \in J \cap D\} = 1 .$$

Cvičení 1.5. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P), T$ a $\{X_t, t \in T\}$ jsou jako v cvičení 1.4. Uvažujme proces $\{Y_t, t \in T\}$ definovaný předpisem

$$Y_t(\omega) = 0, \quad t \in T, \quad \omega \in \Omega.$$

Ukažte, že $\{Y_t, t \in T\}$ je stochastická verze $\{X_t, t \in T\}$, která je separabilní.

2. MARKOVOVY ŘETĚZCE S DISKRÉTNÍM ČASEM

2.1. Základní vlastnosti

Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a uvažujme na něm posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, které nabývají pouze celočíselných hodnot. Nechť S je množina celých čísel i takových, že $i \in S$ právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $P(X_n = i) > 0$. Množina S může být buď konečná nebo spočetně nekonečná. Budeme jí říkat *množina stavů* náhodného procesu $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ a její prvky budeme nazývat *stavy*. Bez omezení na obecnosti budeme předpokládat, že $S = \{0, 1 \ldots, N\}$ nebo $S = \{0, 1, \ldots\}$.

Definice. Posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá *Markovův řetězec s diskrétním časem* a množinou stavů S, jestliže

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{2.1}$$

pro všechna $n = 0, 1, \ldots$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$ taková, že $P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) > 0$.

Vztah (2.1) vyjadřuje *markovskou vlastnost;* znamená, že pravděpodobnost výsledku v budoucím čase $n+1$, známe-li výsledek v přítomném čase n a výsledky z minulých časů $n-1, n-2, \ldots, 0$, je stejná, jako když známe jen výsledek v přítomném čase.

Podmíněné pravděpodobnosti

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$$

(pokud jsou definovány) se nazývají *pravděpodobnosti přechodu* ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$, někdy též *pravděpodobnosti přechodu 1. řádu*. Podobně podmíněné pravděpodobnosti

$$P(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+m)$$

pro přirozené $m \geq 1$ se nazývají pravděpodobnostmi přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+m$, jinak též *pravděpodobnosti přechodu $m-$tého řádu*. Jestliže pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(n, n+m)$ nezávisí na časových okamžicích n a $n+m$, ale jen na jejich rozdílu m, říkáme, že příslušný Markovův řetězec je *homogenní*.

Poznámka. Terminologie, kterou zde užíváme (stavy, přechody mezi nimi), je přejata z fyziky. Modely, kterými se zde budeme zabývat, totiž často popisují vývoj nějakého reálného stavového systému, který se mění v čase. V této kapitole budeme uvažovat výhradně diskrétní čas; Markovovy řetězce v této kapitole budou vždy řetězce s diskrétním časem, i když to nebude explicitně uvedeno.

Uvažujme nyní homogenní Markovův řetězec $\{X_n\}$. Pravděpodobnosti přechodu prvního řádu $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ jsou v tomto případě nezávislé na n; budeme je značit p_{ij} a přívlastek "prvního řádu" vynecháme. Protože pro každé $i \in S$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $P(X_n = i) > 0$ a tedy podmíněná pravděpodobnost $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$ je definována pro všechna $j \in S$, můžeme všechny tyto pravděpodobnosti sestavit do čtvercové matice $\boldsymbol{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$. Zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}_0$

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in S; \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S. \tag{2.2}$$

Čtvercová matice, jejíž prvky mají vlastnost (2.2), se nazývá *stochastická matice;* matice $\boldsymbol{P}$ pravděpodobností přechodu homogenního Markovova řetězce je tedy stochastická matice.

Označme dále

$$p_i = P(X_0 = i), \quad i \in S.$$

Zřejmě platí

$$p_i \geq 0, \quad i \in S; \quad \sum_{i \in S} p_i = 1. \tag{2.3}$$

Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{p} = \{p_i, i \in S\}$ se nazývá *počáteční rozdělení* Markovova řetězce.

Dále nás budou zajímat konečněrozměrná rozdělení Markovova řetězce, která v tomto případě jsou jednoznačně popsána pravděpodobnostmi $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a všechna $i_k \in S$.

Věta 2.1. *Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je náhodný proces s množinou stavů $S = \{0, 1, \dots\}$. Nechť $\boldsymbol{p} = \{p_i, i \in S\}$ je vektor splňující (2.3) a $\boldsymbol{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$ je matice, která splňuje (2.2). Potom $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec s počátečním rozdělením $\boldsymbol{p}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$ tehdy a jen tehdy, když všechna konečněrozměrná rozdělení tohoto procesu jsou tvaru*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} \tag{2.4}$$

pro všechna $i_0, i_1, \dots, i_k \in S$ a všechna $k \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz. Připomeňme vlastnosti podmíněných pravděpodobností:
jestliže $A_0, A_1, \dots, A_k$ jsou náhodné jevy, potom

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{k} A_i\right) = P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=0}^{k-1} A_i\right).P\left(A_{k-1} \middle| \bigcap_{i=0}^{k-2} A_i\right) \dots P(A_1|A_0).P(A_0),$$

pokud

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} A_i\right) > 0.$$

Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec. Položme $A_j = [X_j = i_j], j = 0, 1, \dots, k$ a předpokládejme nejprve, že

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) > 0. \tag{2.5}$$

Potom máme

$$\begin{aligned} &P(X_0 = i_0, \dots, X_k = i_k) \\ &\qquad = P(X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_0 = i_0) \dots \underbrace{P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)}^{p_{i_0 i_1}} \overbrace{P(X_0 = i_0)}^{p_{i_0}}, \end{aligned}$$

odkud vzhledem k markovské vlastnosti a počátečnímu rozdělení dostaneme (2.4). Pokud podmínka (2.5) není splněna, položme

$$j^* = \min\{j \geq 0 : P(X_0 = i_0, \dots, X_j = i_j) = 0\}.$$

Je-li $j^* = 0$, je $P(X_0 = i_0) = p_{i_0} = 0$ a (2.4) platí triviálně. Je-li $j^* > 0$, potom musí platit

$$P(X_0 = i_0, \dots X_{j^*-1} = i_{j^*-1}) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{j^*-2} i_{j^*-1}} > 0$$

a

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_{j^*} = i_{j^*}) = 0.$$

Odtud, vzhledem k tomu, že

$$p_{i_{j^*-1}i_{j^*}} = \frac{P(X_{j^*} = i_{j^*}, X_{j^*-1} = i_{j^*-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{P(X_{j^*-1} = i_{j^*-1}, \ldots, X_0 = i_0)} = 0,$$

plyne opět (2.4).

Nyní předpokládejme, že je dán vektor $\boldsymbol{p}$ splňující (2.3) a matice $\boldsymbol{P}$ splňující (2.2). Uvažujme proces $\{X_n\}$ celočíselných náhodných veličin, jehož konečněrozměrná rozdělení jsou dána (2.4). (Existence takového procesu je zaručena Kolmogorovou větou, věta 1.1). Ukážeme, že tento proces je homogenní Markovův řetězec s počátečním rozdělením $\boldsymbol{p}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$.

Zřejmě $P(X_0 = i_0) = p_{i_0}$ pro každé $i_0 \in S$. Dále, jestliže $P(X_n = i) > 0$, máme podle (2.4)

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i)}{P(X_n = i)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_0, i_1 \ldots, i_{n-1}} P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j)}{\sum\limits_{i_0, i_1 \ldots, i_{n-1}} P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_0, i_1 \ldots, i_{n-1}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\sum\limits_{i_0, i_1 \ldots, i_{n-1}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} = p_{ij}.$$

Zbývá ukázat, že $\{X_n\}$ má markovskou vlastnost.
Nechť

$$p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} > 0.$$

Potom

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \frac{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} = p_{ij}.$$

□

Poznámka. Tvrzení věty 2.1 lze snadno zobecnit na nehomogenní Markovovy řetězce. Všechna konečněrozměrná rozdělení potom budou určena počátečním rozdělením a soustavou pravděpodobností přechodu, tj. bude platit

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k) = p_{i_0} p_{i_0 i_1}(0, 1) \ldots p_{i_{k-1} i_k}(k-1, k)$$

pro $i_0, i_1, \ldots, i_k \in S, k \in \mathbb{N}_0$.

Nyní opět uvažujme homogenní řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$. Položme $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Dále položme $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ a pro přirozené $n \geq 1$ definujme postupně

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}. \tag{2.6}$$

Lze ukázat, že řady v (2.6) jsou konvergentní pro každé $n \geq 1$; je $p_{ij}^{(2)} \leq \sum_{k \in S} p_{ik} = 1$, indukcí podle n dostaneme $p_{ij}^{(n)} \leq 1$, podobně lze ukázat, že matice $\boldsymbol{P}^{(n)}$ prvků $p_{ij}^{(n)}$ jsou stochastické matice. Ze vztahu (2.6) též plyne, že

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^2 \text{ a obecně } \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{(n-1)}.\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P}^n.$$

Nyní ukážeme souvislost s pravděpodobnostmi přechodu vyšších řádů.

Věta 2.2. *Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$. Potom pro pravděpodobnosti přechodu n-tého řádu platí*

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in S \tag{2.7}$$

pro všechna celá $m \geq 0, n \geq 0$ a $P(X_m = i) > 0$.

Důkaz. Pro $n = 0, 1$ je vztah (2.7) zřejmý. Předpokládejme tedy, že (2.7) platí pro nějaké $n > 1$ a všechna $i, j \in S$ a $m \geq 0$. Potom s využitím indukčního předpokladu a markovské vlastnosti

$$\begin{aligned} P(X_{m+n+1} = j | X_m = i) &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n+1} = j, X_{m+n} = k | X_m = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = k | X_m = i) P(X_{m+n+1} = j | X_{m+n} = k, X_m = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = k | X_m = i) P(X_{m+n+1} = j | X_{m+n} = k) \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = p_{ij}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

$n \geq 1$, $i, k \in S$, $\exists m \geq 0$

$0 = P(X_{m+n} = k, X_m = i) = \underbrace{P(X_{m+n} = k \mid X_m = i)}_{= 0 = p_{ik}^{(n)}} \underbrace{P(X_m = i)}_{> 0}$ aby byla podm. prst. def.

(Zde jsme předpokládali, že $P(X_{m+n} = k, X_m = i) > 0$ pro všechna k. Pokud pro nějaké k platí $P(X_{m+n} = k, X_m = i) = 0$, je $P(X_{m+n+1} = j, X_{m+n} = k | X_m = i) = 0$ a také $P(X_{m+n} = k | X_m = i) = p_{ik}^{(n)} = 0$, tedy $p_{ik}^{(n)} p_{kj} = 0$.)

□

Vztah (2.6) lze snadno zobecnit na identitu

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \tag{2.8}$$

pro všechna celá $m, n \geq 0$, která se nazývá *Chapmanova-Kolmogorovova rovnost*. Přechod ze stavu i do stavu j v $m+n$ krocích lze uskutečnit tak, že nejdříve se v m krocích přejde do nějakého stavu k a potom ve zbývajících n krocích ze stavu k do stavu j. Maticově lze (2.8) vyjádřit jako $\boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(m)} \boldsymbol{P}^{(n)}$.

Nepodmíněné pravděpodobnosti $p_j(n) = P(X_n = j)$ se nazývají *absolutní pravděpodobnosti* v čase n a platí pro ně vztah

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{k \in S} P(X_0 = k, X_n = j) = \sum_{k \in S} P(X_n = j | X_0 = k) P(X_0 = k) \\ &= \sum_{k \in S} p_k \, p_{kj}^{(n)}. \end{aligned}$$

Označíme-li $\boldsymbol{p}(n) = \{p_j(n), j \in S\}$, můžeme předchozí vztah vyjádřit vektorově (uvažujeme sloupcové vektory) pomocí počátečního rozdělení a matice pravděpodobností přechodu jako

$$\boldsymbol{p}(n)^T = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{P}^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.9}$$

Snadno se přesvědčíme, že $\sum_{j \in S} p_j(n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, tedy $\{p_j(n), j \in S\}$ je rozdělení Markovova řetězce v čase n.

Poznámka. Je-li množina stavů S konečná, můžeme prvky matice $\boldsymbol{P}^n$ počítat např. podle Perronova vzorce (Dodatek B, věta B.6).

2.2. Příklady Markovových řetězců

Příklad 2.1. Posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ nezávislých celočíselných náhodných veličin tvoří Markovův řetězec, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a celá $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0$ platí

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_m = j)$$

a markovská vlastnost (2.1) je splněna. Jsou-li X_n stejně rozdělené s rozdělením $\{a_i, i \in \mathbb{N}_0\}$, jde o homogenní řetězec s počátečním rozdělením

$$\boldsymbol{p} = (a_0, a_1, \ldots)^T$$

a maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.2. Nechť $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost nezávislých celočíselných náhodných veličin. Položme

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \quad n \geq 1.$$

Ukážeme, že $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ má markovskou vlastnost (2.1). Podle definice podmíněné pravděpodobnosti je levá strana v (2.1) rovna

$$\frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 0)}{P(X_n = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 0)}. \tag{2.10}$$

Vzhledem k ekvivalenci jevů

$$[X_{n+1} = j, X_n = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 0], \quad [Y_{n+1} = j - i, Y_n = i - i_{n-1}, \ldots, Y_1 = i_1]$$

a jevů

$$[X_n = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 0], \quad [Y_n = i - i_{n-1}, \ldots, Y_1 = i_1]$$

a vzhledem k nezávislosti náhodných veličin Y_n je výraz v (2.10) roven $P(Y_{n+1} = j - i)$. Pravá strana (2.1) je analogicky

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \frac{P(Y_{n+1} = j - i, X_n = i)}{P(X_n = i)} = P(Y_{n+1} = j - i).$$

Posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ tedy tvoří Markovův řetězec, jehož pravděpodobnosti přechodu jsou $p_{ij}(n, n+1) = P(Y_{n+1} = j - i)$. V případě, že Y_n jsou stejně rozdělené, jde o homogenní řetězec. Speciálně, náhodná procházka na přímce popsaná v příkladu 1.2 je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{0, \pm 1 \ldots\}$, s pravděpodobnostmi přechodu $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, i \in S$.

Příklad 2.3. *Úloha o ruinování hráče.* Hráč A a jeho protivník B hrají opakovaně jistou hru, která může skončit jen výhrou jednoho z nich. Ve hře je kapitál a jednotek, přičemž na počátku má hráč A celkem z jednotek kapitálu, jeho protivník $a-z$ jednotek. Vyhraje-li hráč A, získá od svého protivníka 1 jednotku kapitálu, prohraje-li, jednu jednotku ztrácí. Hráči hrají tak dlouho, dokud jeden z nich neztratí všechen svůj kapitál. Předpokládá se, že pravděpodobnosti výhry hráčů A a B jsou p a $q = 1-p$ a že výsledky opakovaných partií jsou stochasticky nezávislé. Jestliže X_n značí kapitál, který po $n-$té partii vlastní hráč A, můžeme se snadno přesvědčit, že $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec se stavy $0, 1, \ldots, a$, s počátečním rozdělením $p_z = 1, p_j = 0, j \neq z$ a s pravděpodobnostmi přechodu $p_{00} = p_{aa} = 1$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q, 1 \leq i \leq a-1$. Matice pravděpodobností přechodu má tedy tvar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jiná interpretace úlohy může být tato: částice se pohybuje po celočíselných bodech na přímce mezi bariérami v bodech $x = 0$ a $x = a > 0$, v každém kroku o jednotku vpravo s pravděpodobností p, o jednotku vlevo s pravděpodobností q, nezávisle na předchozím kroku. Dosáhne-li bodu 0 nebo a, setrvá v něm (pohlcující bariéry v bodech 0, a). Poloha částice v čase n je potom Markovův řetězec popsaný výše.

Příklad 2.4. Galtonův-Watsonův proces větvení popsaný v úvodní kapitole (příklad 1.3) je Markovův proces. Počet jedinců v nulté generaci je $X_0 = 1$, počet jedinců první generace je náhodná veličina X_1 s rozdělením $P(X_1 = j) = a_j, j = 0, 1, \ldots$ a počet jedinců $n-$té generace je $X_n = U_{n1} + \cdots + U_{nX_{n-1}}$, kde U_{ni} jsou náhodné veličiny se stejným rozdělením jako X_1, nezávislé mezi sebou i na $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0$. Je tedy

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 1) \\ = P\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} U_{nk} = j \,\middle|\, X_{n-1} = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 1 \right) \\ = P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j \,\middle|\, X_{n-1} = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 1 \right) \\ = P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j \right) = P(X_n = j | X_{n-1} = i), \end{aligned}$$

což je markovská vlastnost.

Počáteční rozdělení procesu $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je $\boldsymbol{p} = (0, 1, 0 \dots)^T$ a pravděpodobnosti přechodu jsou

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j\right) = a_j^{*i},$$

kde $\{a_j\}^{*i}$ je i–tá konvoluční mocnina $\{a_j\}$ (viz Dodatek A.)

Příklad 2.5. *Generování Markovova řetězce* s danou množinou stavů S, s předepsaným počátečním rozdělením $\boldsymbol{p} = \{p_i, i \in S\}$ a předepsanou maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$.

Nechť $\{U_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$. Definujme náhodnou veličinu X_0 předpisem

$$X_0 = k \iff \sum_{i=0}^{k-1} p_i < U_0 \leq \sum_{i=0}^{k} p_i$$

(položíme $\sum_{i=0}^{-1} p_i = 0$). Potom X_0 nabývá hodnoty k s pravděpodobností p_k. Dále definujme funkci $f(i, u)$ na $S \times [0, 1]$ předpisem

$$f(i, u) = k \iff \sum_{j=0}^{k-1} p_{ij} < u \leq \sum_{j=0}^{k} p_{ij}.$$

Nyní definujeme náhodné veličiny X_n rekurentně předpisem

$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Tedy jestliže $X_n = i$, náhodná veličina X_{n+1} nabývá hodnoty k s pravděpodobností p_{ik}. Je vidět, že náhodná veličina X_n je funkcí jen náhodných veličin $U_n, U_{n-1}, \dots, U_0$, tedy X_n a U_{n+1} jsou nezávislé a

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(f(X_n, U_{n+1}) = j | X_n = i) = P(f(i, U_{n+1}) = j) = p_{ij}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P(f(i, U_{n+1}) = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(f(i, U_{n+1}) = j) = p_{ij},\end{aligned}$$

neboť náhodné veličiny $X_n, X_{n-1}, \dots, X_0$ nezávisí na U_{n+1}. Tedy konstruovaná posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ má markovskou vlastnost.

Příklad 2.6. *Model zásob.* Uvažujme nějaké zboží, po kterém je poptávka, a jehož zásoba v celých jednotkách se kontroluje ve stanovených časových okamžicích $t_0, t_1, t_2 \dots$ Poptávka po zboží v intervalu $[t_n, t_{n+1})$ je náhodná veličina D_n. Předpokládáme, že $D_n, n = 0, 1, \dots$ jsou nezávislé stejně rozdělené celočíselné náhodné veličiny s rozdělením $P(D_n = k) = p_k, k = 0, 1, \dots$ Zásobovací strategie je následující: nechť m, M jsou dvě přirozená čísla, pro která $m < M$. Jestliže v čase t_n je velikost zásoby X_n v rozpětí $m < X_n \leq M$, zboží se nedoplňuje, je-li však $X_n \leq m$, doplní se jeho množství až na úroveň M. Předpokládáme, že D_n nezávisí na X_0 a $X_0 \leq M$. Potom velikost zásoby v čase t_{n+1} (před možným doplněním) je

$$X_{n+1} = \begin{cases} \max(X_n - D_n, 0) & m < X_n \leq M, \\ \max(M - D_n, 0) & X_n \leq m. \end{cases}$$

Vidíme, že X_{n+1} závisí jen na X_n a D_n, a že X_n, D_n jsou nezávislé. Je tedy posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovův řetězec se stavy $0, 1, \dots, M$. Matice pravděpodobností přechodu má prvky

$$\begin{aligned} p_{i0} &= q_M, & & i = 0, 1, \dots, m \\ p_{ij} &= p_{M-j}, & & i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, M \\ p_{i0} &= q_i, & & i = m+1, \dots, M \\ p_{ij} &= p_{i-j}, & & i = m+1, \dots, M, \ j = 1, \dots, i \\ p_{ij} &= 0, & & i = m+1, \dots, M \ \ j = i+1, \dots, M, \end{aligned}$$

kde

$$q_k = p_k + p_{k+1} + \dots, \quad m < k \leq M.$$

Příklad 2.7. *Model havarijního pojištění.* Pro pojištění motorových vozidel používá pojišťovna tři kategorie pojistného : 0 základní pojistné, 1–bonus 30%, 2–bonus 50%. V prvním pojistném období (roce) platí pojištěný základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezškodní průběh, je pojištěný v dalším pojistném období zařazen o kategorii výše (získá bonus), pokud ale uplatní 1 pojistný nárok, je v příštím období zařazen o jednu kategorii níže, při uplatnění více než jednoho pojistného nároku o dvě kategorie níže. Počet výskytů pojistné události v n–tém pojistném období je náhodná veličina Y_n; předpokládám, že náhodné veličiny $Y_n, n = 1, 2, \dots$ jsou nezávislé a mají stejné Poissonovo rozdělení s parametrem λ. Nechť X_n značí kategorii pojistného v n–tém pojistném období. Zřejmě platí pro $n \geq 1$

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min(X_n + 1, 2) & \text{pro } Y_n = 0, \qquad e^{-\lambda} \\ \max(X_n - 1, 0) & \text{pro } Y_n = 1, \qquad \lambda e^{-\lambda} \\ 0 & \text{pro } Y_n > 1. \qquad 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \end{cases}$$

Je tedy $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1, 2\}$, s počátečním rozdělením $\boldsymbol{p} = (1, 0, 0)^T$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

2.3. Klasifikace stavů Markovova řetězce

Nadále se budeme zabývat jen homogenními Markovovými řetězci, aniž bychom to zdůrazňovali. Dále se dohodněme na tomto značení: jestliže Markovův řetězec $\{X_n\}$ vychází za stavu j, t. j. $P(X_0 = j) = 1$, budeme podmíněné pravděpodobnosti $P(.|X_0 = j)$ značit jako

$$P(.|X_0 = j) = P_j(.).$$

Podobně budeme značit podmíněnou střední hodnotu jako E_j.

Položme $\tau_j(0) = 0$ a dále definujme

$$\tau_j(1) = \inf\{n > 0 : X_n = j\} \tag{2.11}$$

s konvencí $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Podle této definice je $\tau_j(1)$ náhodná veličina, která nabývá hodnot $1, 2, \ldots$, nebo hodnoty ∞ a značí náhodný okamžik, ve kterém Markovův řetězec poté, co opustil počáteční stav, poprvé vstoupí do stavu j. Někdy se nazývá *čas prvního návratu (resp. vstupu) do stavu j*. Podobně můžeme definovat časy dalších návratů (resp. vstupů) do stavu j předpisem

$$\tau_j(k+1) = \inf\{n > \tau_j(k) : X_n = j\}, \; k = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

Poznámka. Pro náhodné procesy zavádíme pojem markovského času. Jestliže $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je náhodný proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s diskrétním časem a spočetnou množinou stavů S, definujeme *markovský čas* jako takovou náhodnou veličinu $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pro kterou jevy $[\tau = n]$ (resp. $[\tau \leq n]$) patří do σ-algebry $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ generované náhodnými veličinami $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Čas prvního návratu $\tau_j(1)$ je markovský čas, neboť

$$[\tau_j(1) = n] = [X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j] \in \mathcal{F}_n, \; n = 1, 2, \ldots, \; j \in S.$$

Podobně náhodné veličiny $\tau_j(k)$ pro $k = 2, 3, \ldots$ jsou markovské časy.

Nyní můžeme zavést důležitou definici.

Definice. Stav j Markovova řetězce se nazývá *trvalý*, jestliže řetězec, který vychází z j, se do j vrátí s pravděpodobností 1 po konečně mnoha krocích, t. j.

$$P_j(\tau_j(1) < \infty) = 1.$$

Stav j se nazývá *přechodný*, jestliže řetězec, který vychází z j, se s kladnou pravděpodobností do j nikdy nevrátí, t. j.

$$P_j(\tau_j(1) = \infty) > 0.$$

Pro trvalé stavy zaveďme ještě další definici.

Definice. Trvalý stav j se nazývá *nenulový*, jestliže $\mu_j := E_j\tau_j(1) < \infty$, a *nulový*, jestliže $\mu_j = \infty$.

DEF: PERIODICKÝ s periodou $d_j > 1$ ak $d_j = NSD\{n > 0, P_{jj}^{(n)} > 0\}$
NEPERIODICKÝ $d_j = 1$.

Dále zaveďme označení

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(0)} &= 0 \\ f_{ij}^{(n)} &= P_i(\tau_j(1) = n), \quad n \geq 1 \\ f_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P_i(\tau_j(1) < \infty). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že stav j je trvalý, jestliže $f_{jj} = 1$, trvalý nenulový, jestliže navíc řada $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ konverguje, a trvalý nulový, jestliže tato řada diverguje. Je-li $f_{jj} < 1$, je stav j přechodný.

Nyní můžeme ukázat souvislost mezi rozdělením času prvního návratu a pravděpodobnostmi přechodu.

Věta 2.3. *Nechť $p_{ij}^{(n)}$ jsou pravděpodobnosti přechodu n–tého řádu. Potom platí*

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \quad n \geq 1 \tag{2.13}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \quad n \geq 0, \quad i \neq j. \tag{2.14}$$

Pro vytvořující funkce P_{ij}, F_{ij} posloupností $\{p_{ij}^{(n)}\}, \{f_{ij}^{(n)}\}$ (viz Dodatek A) platí

$$P_{jj}(s) = \frac{1}{1 - F_{jj}(s)} \quad 0 \leq s < 1, \tag{2.15}$$

$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s) P_{jj}(s) \quad 0 \leq s < 1 \quad i \neq j. \tag{2.16}$$

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) = P_i(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P_i(X_n = j | \tau_j(1) = k) P_i(\tau_j(1) = k)$
$= \sum_{k=1}^{n} P_i(X_n = j | \tau_j(1) = k) \cdot f_{ij}^{(k)}$
$P_i(X_n = j | \tau_j(1) = k) = P(X_n = j | X_0 = i, X_1 \neq j, \ldots, X_k = j) = p_{jj}^{(n-k)}$ analogicky...

Důkaz. Protože platí $[X_n = j] \subset [\tau_j(1) \leq n]$, máme

$$p_{jj}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = j) = P_j(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P_j(X_n = j | \tau_j(1) = k) P_j(\tau_j(1) = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P_j(X_n = j | \tau_j(1) = k) f_{jj}^{(k)}$$

a dále s využitím markovské vlastnosti

$$P_j(X_n = j | \tau_j(1) = k) = P(X_n = j | X_0 = j, X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j)$$
$$= P(X_n = j | X_k = j) = p_{jj}^{(n-k)}.$$

Odtud plyne (2.13), neboť $f_{jj}^{(0)} = 0$. Důkaz (2.14) se provede analogicky.

Jsou-li $P_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n$, $F_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} s^n$ vytvořující funkce, potom máme z vlastností konvoluce (věta A.3, Dodatek A)

$$P_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \left(\sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \right) = 1 + F_{jj}(s) P_{jj}(s),$$

odkud plyne (2.15). Vztah (2.16) se dostane analogicky. □

$P_{ij}(s) = \sum_{n=0} p_{ij}^{(n)} s^n = \sum s^n \sum f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)} = F_{ij}(s) P_{jj}(s) \quad i \neq j$

Poznámka. Pravděpodobnosti $f_{ij}^{(n)}$ lze počítat také rekurentně (viz cvičení 2.6).

Následující tvrzení může být užitečnou pomůckou pro klasifikaci stavů.

Věta 2.4. *Stav j je trvalý, právě když*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty.$$

přechodný $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$

Důkaz. Zřejmě $f_{jj} = \lim_{s \to 1-} F_{jj}(s) = F_{jj}(1)$. Stav j je trvalý, právě když $f_{jj} = 1$ a to je podle (2.15) právě tehdy, když

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \lim_{s \to 1-} P_{jj}(s) = \lim_{s \to 1-} \frac{1}{1 - F_{jj}(s)} = \infty.$$

□

$P_j(\tau_j(1) < \infty) = 1 = f_{jj} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{jj}^{(k)} = F_{jj}(1) = \lim_{s \to 1} F_{jj}(s)$

potom $\lim_{s \to 1-} P_{jj}(s) = \infty$
$= P_{jj}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty$ a naopak.

Poznámka. Podobně jako v Dodatku A jsme označili limitu vytvořující funkce pro $s \to 1$ zleva jako funkční hodnotu v bodě 1. Toto označení budeme užívat i nadále nejen pro vytvořující funkce, ale i pro jejich derivace.

Příklad 2.8. Uvažujme posloupnost nezávislých hodů hrací kostkou. Nechť X_m značí maximální počet ok dosažených do m-tého hodu včetně. Potom $\{X_m\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{1, \dots, 6\}$ a pravděpodobnostmi přechodu

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6} & i < j \\ \frac{j}{6} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}.$$

Pravděpodobnosti přechodu n-tého řádu jsou

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n & i < j \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}.$$

Vidíme tedy, že $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ konverguje pro $j = 1, \dots, 5$ a diverguje pro $j = 6$. Stavy $1, \dots, 5$ jsou přechodné, stav 6 je trvalý.

Příklad 2.9. *Symetrická náhodná procházka na přímce* je Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{0, \pm 1, \dots\}$ a pravděpodobnostmi přechodu $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, i \in S$ (viz příklady 1.2 a 2.2). Pravděpodobnosti přechodu ze stavu j do stavu j po n krocích jsou

$$p_{jj}^{(n)} = \begin{cases} \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} & n = 2k, \quad k = 0, 1, \dots \\ 0 & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Použijeme-li Stirlingovy formule

$$k! \sim k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}, \quad k \to \infty,$$

dostaneme pro každé $j \in S$ a $k > 0$

$$p_{jj}^{(2k)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}, \quad k \to \infty.$$

Odtud plyne, že $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ pro každé $j \in S$, tedy všechny stavy jsou trvalé.

Nyní uvažujme časy návratu $\tau_j(k)$ definované v (2.12). Potom náhodné veličiny $T_1 = \tau_j(1), T_2 = \tau_j(2) - \tau_j(1), T_3 = \tau_j(3) - \tau_j(2), \dots$ jsou doby mezi návraty do stavu j. Platí pro ně následující věta.

Věta 2.5. *Za podmínky, že $\tau_j(1) < \infty, \dots, \tau_j(k) < \infty$, jsou doby $T_1, T_2, \dots, T_k$ mezi návraty do stavu j nezávislé náhodné veličiny. Vychází-li řetězec ze stavu j, mají $T_1, T_2, \dots, T_k$ rozdělení $\{f_{jj}^{(n)}\}$. Vychází-li řetězec ze stavu $i \neq j$, mají $T_2, T_3, \dots, T_k$ rozdělení $\{f_{jj}^{(n)}\}$ a T_1 má rozdělení $\{f_{ij}^{(n)}\}$.*

Důkaz. Pro zjednodušení zápisu větu dokážeme jen pro náhodné veličiny T_1, T_2. Vyjdeme z identity mezi náhodnými jevy

$$\begin{aligned}[T_1 = m, T_2 = n] &= [\tau_j(1) = m, \tau_j(2) = m + n] \\ &= [X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j, X_{m+1} \neq j, \dots, X_{m+n-1} \neq j, X_{m+n} = j].\end{aligned}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}&P_j(T_1 = m, T_2 = n) = P(T_1 = m, T_2 = n | X_0 = j) \\ &= P(X_{m+n} = j, X_{m+n-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j | X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = j) \\ &\qquad\qquad \times P_j(X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j).\end{aligned}$$

Nyní využijeme jednoduchého zobecnění markovské vlastnosti a dále homogenity a vztahu (2.4). Dostaneme postupně

$$\begin{aligned}P\big(X_{m+n} = j, X_{m+n-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j \big| X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = j\big) \\ = P(X_{m+n} = j, X_{m+n-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j | X_m = j) \\ = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = j) = P_j(\tau_j(1) = n).\end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$P_j(T_1 = m, T_2 = n) = P_j(\tau_j(1) = m) P_j(\tau_j(1) = n) = P_j(T_1 = m) P_j(T_1 = n). \tag{2.17}$$

Odtud

$$P_j(T_2 = n) = \sum_{m=1}^{\infty} P_j(T_1 = m, T_2 = n) = P_j(T_1 = n),$$

takže T_1, T_2 mají stejné rozdělení dané předpisem

$$P_j(T_1 = k) = f_{jj}^{(k)}, \quad k \geq 1. \tag{2.18}$$

Ze vzorce (2.17) také plyne, že T_1, T_2 jsou nezávislé.

Pokud řetězec vychází ze stavu $i \neq j$, potom podobnými úvahami dostaneme

$$P_i(T_1 = m, T_2 = n) = P_i(\tau_j(1) = m) P_j(\tau_j(1) = n) = P_i(T_1 = m) P_j(T_1 = n),$$

$$P_i(T_2 = n) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(T_1 = m, T_2 = n) = P_j(T_1 = n).$$

Vidíme tedy, že náhodné veličiny T_1, T_2 jsou nezávislé, náhodná veličina T_1 má rozdělení

$$P_i(T_1 = k) = P_i(\tau_j(1) = k) = f_{ij}^{(k)}, \quad k \geq 1, \tag{2.19}$$

zatímco T_2 má rozdělení

$$P_i(T_2 = k) = P_j(T_1 = k) = f_{jj}^{(k)}, \quad k \geq 1. \tag{2.20}$$

□

Nyní uvažujme náhodnou veličinu N_j, která udává, kolikrát řetězec po opuštění počátečního stavu projde stavem j, t. j.

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty} I(X_n = j).$$

Zřejmě N_j je náhodná veličina nabývající hodnot $k = 0, 1, \ldots$. Rozdělení této náhodné veličiny udává následující věta.

Věta 2.6. *Platí*

$$P_i(N_j = k) = \begin{cases} 1 - f_{ij}, & k = 0, \\ f_{ij} f_{jj}^{k-1}(1 - f_{jj}) & k > 0. \end{cases}$$

Důkaz. Pro $k = 0$ máme

$$P_i(N_j = 0) = 1 - P_i(N_j \geq 1) = 1 - P_i(\tau_j(1) < \infty) = 1 - f_{ij}.$$

Pro $k > 0$ máme

$$P_i(N_j \geq k) = P_i(\tau_j(k) < \infty) = P_i(T_1 + T_2 + \cdots + T_k < \infty).$$

Podle věty 2.5 jsou náhodné veličiny $T_1, \ldots, T_k$ nezávislé, přičemž T_1 má rozdělení $\{f_{ij}^{(n)}\}$ a $T_2, \ldots, T_k$ mají rozdělení $\{f_{jj}^{(n)}\}$. Vytvořující funkce náhodné veličiny $\tau_j(k)$ je tedy (viz Dodatek A, věta A.3) rovna $F_{ij}(s)[F_{jj}(s)]^{k-1}$. Odtud

$$P_i(N_j \geq k) = P_i(\tau_j(k) < \infty) = \sum_{r=0}^{\infty} P_i(\tau_j(k) = r) = F_{ij}(1)[F_{jj}(1)]^{k-1} = f_{ij} {f_{jj}}^{k-1}.$$

Tudíž

$$P_i(N_j = k) = P_i(N_j \geq k) - P_i(N_j \geq k+1) = f_{ij} f_{jj}^{k-1} - f_{ij} f_{jj}^{k} = f_{ij} f_{jj}^{k-1}(1 - f_{jj}).$$

□

Nyní můžeme snadno dokázat následující větu.

Věta 2.7. *Je-li j trvalý stav Markovova řetězce, potom*

$$P_j(N_j = \infty) = 1.$$

Je-li j stav přechodný, platí

$$P_i(N_j = \infty) = 0, \quad i \in S$$

a dále

$$P_j(N_j = k) = (1 - f_{jj})f_{jj}^k, \quad k \geq 0 \quad \textit{(geometrické rozdělení)}\ .$$

Důkaz. Vzhledem k monotonii náhodných jevů

$$[N_j \geq k] \supset [N_j \geq k+1] \supset \dots$$

máme

$$P_i(N_j = \infty) = \lim_{k\to\infty} P_i(N_j \geq k) = \lim_{k\to\infty} f_{ij} f_{jj}^{k-1}.$$

Předpokládejme, že j je trvalý. Potom $f_{jj} = 1$, tedy $P_j(N_j = \infty) = 1$. Je-li stav j přechodný, je $f_{jj} < 1$ a tudíž $P_i(N_j = \infty) = 0$. Zbytek tvrzení plyne z věty 2.6.

□

Vidíme tedy, že je-li stav j trvalý, vstoupí do něj řetězec s pravděpodobností jedna nekonečně mnohokrát, je-li přechodný, je počet vstupů do j s pravděpodobností jedna konečný.

Zaveďme ještě další klasifikaci.

Definice. Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro které $p_{jj}^{(n)} > 0$. Je-li $d_j > 1$, říkáme, že stav j je *periodický s periodou d_j*, je-li $d_j = 1$, říkáme, že stav j je *neperiodický*.

Příklad 2.10. V úloze o ruinování hráče (příklad 2.3) jsou stavy 0, a neperiodické, stavy $1, \dots, a-1$ periodické s periodou 2. V příkladě 2.9 (symetrická náhodná procházka na přímce) jsou všechny stavy periodické s periodou 2.

Poznámka. Je-li $p_{jj} > 0$, je stav j neperiodický. Tato podmínka však není nutná; např. v řetězci s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $p_{11} = 0$, $p_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}$, $p_{11}^{(3)} = \frac{1}{2}$, tedy $d_1 = 1$.

Dále se budeme zabývat limitním chováním pravděpodobností přechodu v souvislosti s klasifikací stavů. Nejdříve uvedeme jednu pomocnou větu.

Lemma 2.8. *Nechť $\{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost reálných čísel takových, že $f_0 = 0$, $f_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$ a největší společný dělitel čísel n, pro něž $f_n > 0$, je roven 1. Definujme posloupnost $\{u_n\}$ předpisem*

$$u_0 = 1$$
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f_k u_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

[illegible]

Nechť $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k f_k$. Potom při $n \to \infty$

$$u_n \to \frac{1}{\mu}, \quad \mu < \infty$$
$$u_n \to 0, \quad \mu = \infty.$$

Důkaz. Feller (1964), str. 331–333.

□

Věta 2.9. *(i) Nechť j je přechodný stav Markovova řetězce. Potom při $n \to \infty$*

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \quad i \in S.$$

(ii) Nechť j je trvalý nenulový a neperiodický. Potom při $n \to \infty$

$$p_{jj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j}$$
$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \quad i \neq j,$$

kde $\mu_j = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ je střední doba prvního návratu do stavu j.

(iii) Nechť j je trvalý nenulový s periodou d_j. Potom při $k \to \infty$

$$p_{jj}^{(kd_j)} \to \frac{d_j}{\mu_j}$$
$$p_{ij}^{(kd_j+l)} \to \frac{d_j}{\mu_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{ij}^{(d_j\nu+l)}, \quad 0 \le l < d_j, \quad i \ne j$$

a dále platí při $n \to \infty$

$$\overline{p}_{ij}^{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{ij}^{(\nu)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \quad i \ne j.$$

(iv) Nechť j je trvalý nulový. Potom při $n \to \infty$

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \quad i \in S.$$

Důkaz. (i) Nechť stav j je přechodný. Potom podle věty 2.4 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$ a tudíž $p_{jj}^{(n)} \to 0$ s rostoucím n. Podobně podle (2.16) a (2.15)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) = \frac{F_{ij}(1)}{1 - F_{jj}(1)} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} < \infty,$$

takže $p_{ij}^{(n)} \to 0, \quad i \ne j$.

(ii) Nechť j je trvalý nenulový a neperiodický. V lemmatu 2.8 položme $f_n = f_{jj}^{(n)}$, $u_n = p_{jj}^{(n)}$ a uvědomme si, že je-li číslo 1 největší společný dělitel čísel $\{n \ge 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\}$, pak je také největší společný dělitel čísel $\{n \ge 1 : f_{jj}^{(n)} > 0\}$. Tedy podle lemmatu 2.8 $p_{jj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j}$, kde $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = F_{jj}'(1)$.

Pro $i \ne j$ máme podle (2.14) a pro $n > N$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=N+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \tag{2.21}$$

takže můžeme psát

(2.22)
$$\left| p_{ij}^{(n)} - \frac{f_{ij}}{\mu_j} \right| \le \left| p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \right| + \left| \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} \right| + \left| \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} - \frac{f_{ij}}{\mu_j} \right|.$$

Podle (2.21) je

$$\left| p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \right| = \sum_{k=N+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \leq \sum_{k=N+1}^{n} f_{ij}^{(k)} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} < \varepsilon$$

pro $\varepsilon > 0$ a dostatečně velké N ($N > N_0(\varepsilon)$), neboť $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = f_{ij} \leq 1 < \infty$.

Pro druhý člen na pravé straně (2.22) máme pro dané N a $n > N + n_0(\varepsilon)$

$$\left| \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} \right| \leq \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} \left| p_{jj}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_j} \right| < \varepsilon \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leq \varepsilon,$$

neboť jsme již dokázali, že $p_{jj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j}$ při $n \to \infty$.

Konečně máme

$$\frac{1}{\mu_j} \left| \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(k)} - f_{ij} \right| = \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} < \frac{\varepsilon}{\mu_j}$$

pro $N > N_0(\varepsilon)$. Výraz na levé straně (2.22) tedy lze učinit libovolně malý vhodnou volbou n a N.

(iii) Nechť j je trvalý nenulový s periodou d_j. Potom $p_{jj}^{(n)} = 0$, $f_{jj}^{(n)} = 0$ pro $n \neq kd_j$, $k = 0, 1, \ldots$. Označme

$$\widetilde{p}_{jj}^{(k)} = p_{jj}^{(kd_j)}, \quad \widetilde{f}_{jj}^{(k)} = f_{jj}^{(kd_j)}.$$

Podle tvrzení (ii) aplikovaného na posloupnost $\{\widetilde{p}_{jj}^{(k)}\}$ platí pro $k \to \infty$

$$\widetilde{p}_{jj}^{(k)} \to \frac{1}{\widetilde{\mu}_j},$$

kde $\widetilde{\mu}_j = \sum_{k=1}^{\infty} k \widetilde{f}_{jj}^{(k)} = \widetilde{F}_{jj}'(1)$ a $\widetilde{F}_{jj}$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{\widetilde{f}_{jj}^{(k)}\}$. Máme

$$\widetilde{F}_{jj}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{f}_{jj}^{(k)} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_{jj}^{(kd_j)} \left(s^{1/d_j}\right)^{kd_j} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{n} \left(s^{1/d_j}\right)^{n} = F_{jj}(s^{1/d_j}),$$

odkud dostáváme

$$\widetilde{\mu}_j = \widetilde{F}_{jj}'(1) = \frac{1}{d_j} F_{jj}'(1) = \frac{\mu_j}{d_j},$$

takže

$$p_{jj}^{(kd_j)} \to \frac{d_j}{\mu_j}.$$

Pro $i \neq j$ dostaneme z (2.14)

$$p_{ij}^{(kd_j+l)} = \sum_{\nu=0}^{k} f_{ij}^{(\nu d_j+l)} p_{jj}^{(k-\nu)d_j},$$

dále lze postupovat analogicky jako v (ii).

Podle Tauberovy věty (vlastnost (iii) v Dodatku A) a (2.16) a (2.15)

$$\lim_{n\to\infty} \bar{p}_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} p_{ij}^{(\nu)} = \lim_{s\to 1-} (1-s)P_{ij}(s)$$

$$= \lim_{s\to 1-} \frac{1-s}{1-F_{jj}(s)} F_{ij}(s) = \frac{F_{ij}(1)}{F'_{jj}(1)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

(iv) Je-li j trvalý nulový neperiodický, potom podle lemmatu 2.8 $p_{jj}^{(n)} \to 0$ a odtud plyne $p_{ij}^{(n)} \to 0$ pro $i \neq j$ analogicky jako v (ii), neboť každý ze sčítanců v (2.21) lze učinit libovolně malým pro dostatečně velké n a N. Je-li j trvalý nulový s periodou d_j, je $p_{jj}^{(n)} = 0$ pro $n \neq kd_j$ a $p_{jj}^{(kd_j)} \to 0$ podobně jako v (iii).

□

Poznámka. Vztah

$$\bar{p}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j} \quad i \neq j$$

platí i v případě, že stav j je trvalý neperiodický.

Věta 2.10. *Trvalý stav j je nulový právě tehdy, když $p_{jj}^{(n)} \to 0$ při $n \to \infty$.*

Důkaz. Nechť j je trvalý stav, pro který $p_{jj}^{(n)} \to 0$. Potom $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} \to 0$ a tedy podle Tauberovy věty

$$\lim_{s\to 1-} (1-s)P_{jj}(s) = 0,$$

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$

což podle (2.15) implikuje

$$\lim_{s\to 1-} \frac{1-s}{1-F_{jj}(s)} = \frac{1}{F'_{jj}(1)} = \frac{1}{\mu_j} = 0,$$

$x_0 = 1$

$x = s$

$F_{jj}(1) = \sum f_{jj}^{(n)} = f_{jj} = 1$ pro trvalé stavy

tedy j je nulový. Zbytek důkazu plyne z věty 2.9.

□

2.4. Rozklad množiny stavů

Definice. Řekneme, že stav j je *dosažitelný* ze stavu i, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Jestliže $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, říkáme, že j *není dosažitelný* z i.

Poznámka. Každý stav je dosažitelný ze sebe sama, neboť $p_{jj}^{(0)} = 1$ (je $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$).

Definice. Neprázdná množina stavů C se nazývá *uzavřená*, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C. Nejmenší uzavřená množina obsahující množinu C se nazývá *uzávěr* množiny C. Uzavřená množina stavů se nazývá *nerozložitelná*, jestliže neobsahuje žádnou uzavřenou vlastní podmnožinu.

Věta 2.11. *Množina stavů C je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $p_{ij} = 0$ pro všechna $i \in C$, $j \notin C$.*

Důkaz. 1. Nechť $p_{ij} = 0 \ \forall\ i \in C,\ j \notin C$. Ukážeme indukcí, že $p_{ij}^{(n)} = 0\ \forall\ n$. Pro $n = 1$ tento vztah platí podle předpokladu; nechť tedy pro nějaké přirozené $n \geq 1$ platí $p_{ij}^{(n)} = 0 \ \forall\ i \in C,\ j \notin C$. Podle Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti (2.8) dostaneme

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

Je-li $k \in C$, potom $p_{kj} = 0$ podle předpokladu věty. Je-li $k \notin C$, potom $p_{ik}^{(n)} = 0$ podle indukčního předpokladu.

2. Nechť C je uzavřená, potom $\forall\ i \in C,\ j \notin C$ je $p_{ij}^{(n)} = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ a tedy i pro $n = 1$.

□

Definice. Je-li jednobodová množina $\{j\}$ uzavřená, t. j. je-li $p_{jj} = 1$, pak stav j se nazývá *absorpční*.

Poznámka. Vynecháme-li v matici pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$ řádky a sloupce odpovídající stavům vně uzavřené množiny C, dostaneme opět stochastickou matici. Množina C je množina stavů Markovova řetězce, kterému se říká *podřetězec* původního řetězce.

Definice. Markovův řetězec se nazývá *nerozložitelný*, jestliže každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu, t. j. neexistuje v něm jiná uzavřená množina než množina všech stavů. V opačném případě je řetězec *rozložitelný*.

Příklad 2.11. V úloze o ruinování hráče (příklad 2.3) jsou ze stavů $1, 2, \ldots, a-1$ dosažitelné všechny stavy $0, 1, \ldots, a$, ze stavu 0 je dosažitelný jen stav 0, ze stavu a je dosažitelný jen stav a. Množiny $\{0\}, \{a\}$ jsou uzavřené, množina $\{1, 2, \ldots, a-1\}$ není uzavřená, neboť např. stav 0 je dosažitelný ze stavu 1. Stavy 0 a a jsou absorpční. Řetězec je rozložitelný. V modelu havarijního pojištění (příklad 2.7) jsou všechny stavy vzájemně dosažitelné. Řetězec je nerozložitelný.

Věta 2.12. *Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný tehdy a jen tehdy, je-li (po případné permutaci řádků a sloupců) matice pravděpodobností přechodu tvaru*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

kde $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice.

Důkaz. 1. Nechť $\boldsymbol{P}$ je tvaru

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice. Potom $\boldsymbol{P}_1$ je uzavřená množina a tedy řetězec je rozložitelný.

2. Nechť řetězec je rozložitelný, tedy obsahuje uzavřenou podmnožinu stavů. Stavy řetězce přečíslujme tak, aby nejnižší pořadová čísla patřila stavům z uvažované uzavřené množiny. Provedením permutací na řádky a sloupce matice $\boldsymbol{P}$ dostane matice tvar uvedený ve znění věty.

$\square$

Příklad 2.12. Uvažujme řetězec s maticí

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že v řetězci je uzavřená množina $\{1, 5\}$. Po provedení permutace $(1, 5, 2, 3, 4)$ na řádky a sloupce dostaneme matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Předpoklad o tom, že matice $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}$ jsou čtvercové, je podstatný. Např. řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

je nerozložitelný, neboť $p_{13}^{(2)} > 0$, tedy stav 3 je dosažitelný z 1 (po dvou krocích).

Definice. Řekneme, že dva stavy Markovova řetězce jsou *stejného typu,* jsou-li oba současně buď přechodné nebo oba trvalé nulové nebo nenulové, oba neperiodické nebo periodické se stejnou periodou.

Věta 2.13. *Je-li stav j dosažitelný ze stavu i a stav i dosažitelný ze stavu j, potom jsou oba stejného typu.*

Důkaz. Nechť j je dosažitelný z i a i je dosažitelný z j. Potom existuje N a M tak, že $p_{ij}^{(N)} = \alpha > 0, p_{ji}^{(M)} = \beta > 0$. Podle Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti pro libovolné $n \geq 0$

$$p_{ii}^{(N+M+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(N)} p_{ki}^{(M+n)} \geq p_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(M+n)},$$

$$p_{ji}^{(M+n)} = \sum_{k \in S} p_{jk}^{(n)} p_{ki}^{(M)} \geq p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(M)},$$

tedy

$$p_{ii}^{(N+M+n)} \geq \alpha\beta p_{jj}^{(n)} \tag{2.23}$$

a podobně

$$p_{jj}^{(N+M+n)} \geq \alpha\beta p_{ii}^{(n)}. \tag{2.24}$$

Je-li i trvalý, potom z (2.24) a věty 2.4 plyne, že také j je trvalý, je-li i trvalý nulový, potom podle (2.23) a věty 2.10 také j musí být trvalý nulový, je-li i trvalý nenulový, potom (2.24) implikuje, že j je trvalý nenulový. Je-li i přechodný, je také j přechodný podle (2.23) a věty 2.4. Argumentace pro stavy j a i je symetrická.

Nyní předpokládejme, že i a j jsou vzájemně dosažitelné, nechť i má periodu d_i. Podle (2.23) pro $n = 0$ je $p_{ii}^{(M+N)} \geq \alpha\beta > 0$, tedy $M + N$ je dělitelné číslem d_i. Potom $p_{ii}^{(M+N+n)}$ je kladné pro n dělitelné d_i a rovno nule pro n nedělitelné d_i, odtud a z (2.23) $p_{jj}^{(n)} = 0$ pro n nedělitelné d_i, tedy největší společný dělitel $\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\} \geq d_i$, čili j je periodický s periodou $d_j \geq d_i$. Zaměníme-li roli i a j, dostaneme $d_i \geq d_j$, tedy $d_i = d_j$.

□

Věta 2.14. *V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.*

Důkaz. Plyne jako důsledek z předchozí věty.

□

Věta 2.15. *Nechť j je trvalý a nechť k je dosažitelný z j. Potom*

(i) *k je trvalý,*

(ii) *j je dosažitelný z k,*

(iii) $f_{jk} = P_j(\tau_k(1) < \infty) = P_k(\tau_j(1) < \infty) = f_{kj} = 1.$

Důkaz. Dokážeme (ii); tím bude dokázáno i tvrzení (i), neboť j a k budou vzájemně dosažitelné a tedy stejného typu.

Stav k je podle předpokladu dosažitelný z j, tedy existuje m takové, že $p_{jk}^{(m)} > 0$; nechť m je nejmenší přirozené číslo s touto vlastností.

Předpokládejme nyní, že j není dosažitelný z k, potom

$$P_k(X_n \neq j, \forall\, n \geq 1) = P_k(\tau_j(1) = \infty) = 1.$$

Protože j je trvalý, je podle věty 2.7 $P_j(N_j = \infty) = 1$, tedy musí být $P_j(X_m \neq j, X_{m+1} \neq j, \ldots) = 0$ (m je konečné). Potom platí

$$\begin{aligned}
0 &= P_j(X_m \neq j, X_{m+1} \neq j, \ldots) \geq P_j(X_m = k, X_{m+1} \neq j, \ldots) \\
&= P(X_m = k, X_{m+1} \neq j, \ldots | X_0 = j) \\
&= P(X_{m+1} \neq j, X_{m+2} \neq j, \ldots | X_m = k, X_0 = j) P(X_m = k | X_0 = j) \\
&= P(X_{m+1} \neq j, X_{m+2} \neq j, \ldots | X_m = k) P(X_m = k | X_0 = j) \\
&= P(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots | X_0 = k) p_{jk}^{(m)} \\
&= P_k(X_n \neq j, \forall\, n \geq 1) p_{jk}^{(m)} = p_{jk}^{(m)} > 0,
\end{aligned}$$

což je spor, tedy j je dosažitelný z k a (ii) a (i) platí.

Podobně máme s využitím podmiňování, markovské vlastnosti a homogenity

$$\begin{aligned}1 - f_{jj} &= P_j(\tau_j(1) = \infty) \geq P_j(\tau_j(1) = \infty, X_m = k) \\ &= P_j(X_1 \neq j, \ldots, X_{m-1} \neq j, X_m = k, X_{m+1} \neq j, \ldots) \\ &= p_{jk}^{(m)} P_k(\tau_j(1) = \infty) = p_{jk}^{(m)}[1 - f_{kj}].\end{aligned}$$

Protože j je trvalý, je $f_{jj} = 1$ a tudíž i $f_{kj} = 1$ (neboť $p_{jk}^{(m)} > 0$, viz výše.) Protože také k je trvalý, dokážeme stejným způsobem, že $f_{jk} = 1$.

□

Vidíme, že množina stavů dosažitelných z nějakého trvalého stavu je uzavřená a je to množina stavů nerozložitelného podřetězce původního řetězce. Předchozí věta nám tak umožňuje rozložit množinu stavů S Markovova řetězce s trvalými stavy následujícím způsobem. Nechť j_1 je trvalý stav s nejnižším indexem, nechť C_1 je množina všech stavů dosažitelných z j_1; nechť j_2 je trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi trvalými stavy, které nepatří do C_1, nechť C_2 je množina všech stavů dosažitelných z j_2 atd.

Můžeme tedy psát S ve tvaru

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots,$$

kde T je množina stavů přechodných a $C_1, C_2, \ldots$ jsou disjunktní uzavřené nerozložitelné množiny stavů trvalých.

Je-li množina stavů S konečná, potom matice pravděpodobností přechodu (po eventuálním přečíslování stavů) má tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P}_2 & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boldsymbol{P}_r & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 & \ldots & \boldsymbol{Q}_r & \boldsymbol{Q}_{r+1} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_r$ jsou čtvercové matice pravděpodobností přechodu mezi trvalými stavy v podřetězcích $C_1, \ldots, C_r$ a $\boldsymbol{Q}_1, \ldots, \boldsymbol{Q}_{r+1}$ obsahují pravděpodobnosti přechodu ze stavů přechodných. Analogický rozklad lze psát pro matici pravděpodobností přechodu v řetězci s nekonečně mnoha stavy.

Existenci trvalých stavů v řetězci s konečně mnoha stavy zaručuje následující věta.

Věta 2.16. *V řetězci s konečně mnoha stavy nemohou být všechny stavy přechodné.*

Důkaz. Předpokládejme, že všechny stavy jsou přechodné. Potom podle tvrzení (i) ve větě 2.9 platí $p_{ij}^{(n)} \to 0$ při $n \to \infty$ $\forall\, i, j \in S$. Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in S} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad \forall\, i \in S,$$

což je spor, neboť matice $\boldsymbol{P}^{(n)} = \{p_{ij}^{(n)}\}$ je stochastická a její řádkové součty jsou rovny jedné.

□

Příklad 2.13. V řetězci s nekonečně mnoha stavy mohou být všechny stavy přechodné. Uvažujme řetězec s množinou stavů $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$, s počátečním rozdělením $\boldsymbol{p} = (1, 0, \ldots)^T$ a s pravděpodobnostmi přechodu $p_{i,i+1} = 1,\ i \geq 1$. Potom $p_{ii}^{(n)} = 0\ \forall\, i \in S$ a $\forall\, n \geq 1$, tedy $\sum p_{ii}^{(n)} < \infty, i \in S$. Všechny stavy jsou přechodné.

Věta 2.17. *V řetězci s konečně mnoha stavy neexistují nulové stavy.*

Důkaz. Nechť i je trvalý nulový stav; nechť C je množina stavů dosažitelných z i. Potom podle věty 2.15 je C uzavřená nerozložitelná množina trvalých nulových stavů, která definuje podřetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}_C = \{\widetilde{p}_{ij}\}$. Podle věty 2.9 (iv) $\widetilde{p}_{ij}^{(n)} \to 0\ \forall i, j \in C$. Potom ale

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j \in C} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in C} \lim_{n\to\infty} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} = 0,\ i \in C,$$

což je spor, neboť $\boldsymbol{P}_C$ i $\boldsymbol{P}_C^{(n)} = \{\widetilde{p}_{ij}^{(n)}\}$ jsou stochastické matice.

□

Věta 2.18. *V nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavy jsou všechny stavy trvalé nenulové.*

Důkaz. Tvrzení je důsledek vět 2.14, 2.16 a 2.17.

□

2.5. Pravděpodobnosti absorpce

V předchozím odstavci jsme ukázali, že množinu stavů S Markovova řetězce, který obsahuje trvalé stavy, lze rozložit na disjunktní sjednocení

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots,$$

kde T je množina stavů přechodných a $C_1, C_2, \ldots$ jsou uzavřené nerozložitelné množiny stavů trvalých. Množiny C_j mohou být i jednoprvkové; ty odpovídají stavům absorpčním, pro které $p_{jj} = 1$. Řetězec s konečně mnoha stavy, jehož všechny trvalé stavy jsou absorpční, se nazývá *absorpční řetězec*.

Uvažujme řetězec $\{X_n\}$ s množinou přechodných stavů T a definujme náhodnou veličinu

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\},$$

která značí *čas výstupu* z množiny přechodných stavů T. Zřejmě τ je náhodná veličina nabývající hodnot $0, 1, \ldots$, může však s kladnou pravděpodobností být i $\tau = \infty$, jako v příkladě 2.13, kde $T = S$; v tomto případě je $P_i(\tau = \infty) = 1 \quad \forall\, i \in S$.

Věta 2.19. *V řetězci s konečně mnoha stavy je*

$$P_i(\tau = \infty) = 0, \quad i \in T.$$

Důkaz. Protože S a tudíž i T je konečná, je $[\tau = \infty] = \cup_{j \in T}[N_j = \infty]$ a

$$P_i(\tau = \infty) = P_i\left(\bigcup_{j \in T}[N_j = \infty]\right) \leq \sum_{j \in T} P_i(N_j = \infty) = 0,$$

neboť je-li j přechodný, platí podle věty 2.7 $P_i(N_j = \infty) = 0$ pro každé i.

□

Nadále budeme předpokládat, že $P_i(\tau < \infty) = 1$ pro všechna i, t.j. řetězec v konečném čase vystoupí z množiny přechodných stavů T a vstoupí do nějaké uzavřené množiny stavů trvalých. V této množině již pak setrvá.

Nechť X_τ je ten stav, do kterého řetězec vstoupí, jakmile opustí množinu přechodných stavů T. Definujme pravděpodobnosti

$$u_{ij} = P_i(X_\tau = j) \quad i \in T, j \in T^c. \tag{2.25}$$

Je-li j absorpční stav, potom u_{ij} je pravděpodobnost, že řetězec, který byl na počátku v přechodném stavu i, je absorbován stavem j. Je-li C_k nějaká uzavřená nerozložitelná množina stavů trvalých, potom pravděpodobnost, že řetězec, který vychází z i, po opuštění množiny přechodných stavů setrvá v množině C_k, je

$$u_i(C_k) = P_i(X_\tau \in C_k) = \sum_{j \in C_k} u_{ij}. \tag{2.26}$$

Ukažme nyní, jak lze pravděpodobnosti u_{ij} počítat pomocí pravděpodobností přechodu p_{kl}.

Věta 2.20. *Pro pravděpodobnosti u_{ij} definované v (2.25) platí*

$$u_{ij} = p_{ij} + \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} u_{\nu j}, \quad i \in T, j \in T^c. \tag{2.27}$$

Důkaz. Označme jako

$$u_{ij}^{(n)} = P_i(X_\tau = j, \tau = n), \quad i \in T, j \in T^c$$

pravděpodobnost, že řetězec opustí množinu přechodných stavů a přejde do trvalého stavu j právě v čase n. Protože

$$[X_\tau = j] = \bigcup_{n=0}^{\infty} [X_\tau = j, \tau = n],$$

máme

$$u_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{ij}^{(n)} \quad i \in T, j \in T^c.$$

Pro pravděpodobnosti $u_{ij}^{(n)}$ platí

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(0)} &= 0, \\ u_{ij}^{(1)} &= p_{ij}, \\ u_{ij}^{(n)} &= \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} u_{\nu j}^{(n-1)}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

(Výraz pro $n \geq 2$ dostaneme snadno ze vztahu

$$u_{ij}^{(n)} = P_i(X_1 \in T, \ldots, X_{n-1} \in T, X_n = j \in T^c)$$

podmiňováním jevy $[X_1 = \nu \in T, X_0 = i]$ a využitím markovské vlastnosti.) Dostáváme tedy

$$u_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{ij}^{(n)} = p_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} u_{\nu j}^{(n-1)} = p_{ij} + \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} \sum_{n=2}^{\infty} u_{\nu j}^{(n-1)} = p_{ij} + \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} u_{\nu j}.$$

□

Vztah (2.27) můžeme vyjádřit i maticově. Matici pravděpodobností přechodu můžeme (po eventuálním přečíslování stavů) psát ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} P^* & 0 \\ Q & R \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

kde $P^* = \{p_{ij}, i, j \in T^c\}$, $Q = \{p_{ij}, i \in T, j \in T^c\}$, $R = \{p_{ij}, i, j \in T\}$.

Nechť $U = \{u_{ij}, i \in T, j \in T^c\}$ je matice pravděpodobností u_{ij}. Potom vztah (2.27) můžeme přepsat do tvaru

$$U = Q + RU. \tag{2.29}$$

Pro konečné matice odtud máme $(I - R)U = Q$, kde I je jednotková matice stejného řádu jako R. Jestliže k matici $I - R$ existuje matice inverzní, potom existuje jediné řešení této soustavy

$$U = (I - R)^{-1} Q. \tag{2.30}$$

Existenci inverzní matice k $I - R$ zaručuje následující tvrzení.

Lemma 2.21. *Uvažujme řetězec s maticí pravděpodobností přechodu tvaru (2.28). Nechť T je konečná množina přechodných stavů. Potom matice $I - R$ je regulární a platí*

$$(I - R)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R^k.$$

Důkaz. Je-li množina T konečná, je R konečná čtvercová matice obsahující jen pravděpodobnosti přechodu mezi stavy přechodnými. Z rozkladu (2.28) plyne, že $R^n = \{p_{ij}^{(n)}, i, j \in T\}$. Podle věty 2.9 $p_{ij}^{(n)} \to 0$ při $n \to \infty$ $\forall\ i, j \in T$, tedy R^n konverguje s rostoucím n k nulové matici. Zbytek tvrzení plyne z věty B.2 v Dodatku B.

□

Poznámka. Matice $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}$ se nazývá *fundamentální matice* Markovova řetězce.

Příklad 2.14. Student vysoké školy během studia úspěšně ukončí ročník a postoupí do dalšího ročníku s pravděpodobností p, opakuje ročník s pravděpodobností r a zanechá studia s pravděpodobností q, $p+q+r=1$. Předpokládáme, že pravděpodobnosti p, q, r jsou konstantní. Potom lze výsledky studia v jednotlivých ročnících popsat Markovovým řetězcem s množinou stavů 1–zanechání studia, 2–úspěšné ukončení studia, 3–studium 1. ročníku, atd., 7– studium 5.ročníku. Matice pravděpodobností přechodu má tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & r & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & r & p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & r & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & r & p \\ q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

stavy "zanechání studia" a "úspěšné ukončení studia" jsou absorpční, ostatní stavy jsou přechodné. Máme

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 0 \\ q & 0 \\ q & 0 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

a

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+q} & \frac{p}{(p+q)^2} & \frac{p^2}{(p+q)^3} & \frac{p^3}{(p+q)^4} & \frac{p^4}{(p+q)^5} \\ 0 & \frac{1}{p+q} & \frac{p}{(p+q)^2} & \frac{p^2}{(p+q)^3} & \frac{p^3}{(p+q)^4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+q} & \frac{p}{(p+q)^2} & \frac{p^2}{(p+q)^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p+q} & \frac{p}{(p+q)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p+q} \end{pmatrix}.$$

Student, který studuje v prvním ročníku, zanechá studia s pravděpodobností

$$u_{31} = q\left(\frac{1}{p+q} + \frac{p}{(p+q)^2} + \frac{p^2}{(p+q)^3} + \frac{p^3}{(p+q)^4} + \frac{p^4}{(p+q)^5}\right)$$

a úspěšně ukončí studium s pravděpodobností

$$u_{32} = \frac{p^5}{(p+q)^5} = 1 - u_{31}.$$

Příklad 2.15. Určeme pravděpodobnost ruinování hráče A z úlohy 2.3. Víme, že stavy $0, a$ jsou absorpční, ostatní stavy jsou přechodné. Hledáme tedy pravděpodobnost absorpce z přechodného stavu $i, 1 \leq i \leq a-1$ (počáteční kapitál hráče A) do stavu 0. Podle (2.27) pravděpodobnosti absorpce musí splňovat rovnice

$$u_{i0} = p_{i0} + \sum_{\nu=1}^{a-1} p_{i\nu} u_{\nu 0}, \quad i = 1, \ldots, a-1.$$

Dosadíme-li za pravděpodobnosti přechodu, vidíme, že hledané pravděpodobnosti absorpce musí vyhovovat soustavě rovnic

$$\begin{aligned} u_1 - q - pu_2 &= 0, \\ u_i - qu_{i-1} - pu_{i+1} &= 0, \quad i = 2, \ldots, a-2, \\ u_{a-1} - qu_{a-2} &= 0, \end{aligned} \tag{2.31}$$

když pro jednoduchost značíme u_{i0} jako u_i. Dodefinujme

$$u_0 = 1, \quad u_a = 0. \tag{2.32}$$

Potom soustavu (2.31) lze řešit jako homogenní diferenční rovnici

$$-pu_{i+1} + u_i - qu_{i-1} = 0 \tag{2.33}$$

s okrajovými podmínkami (2.32). Charakteristický polynom této rovnice je $-p\lambda^2 + \lambda - q$, který má kořeny **1** a $\frac{q}{p}$.

Obecné řešení diferenční rovnice (2.33) je

$$\begin{aligned} u_i &= c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^i & p \neq q \\ u_i &= c_1 + ic_2 & p = q. \end{aligned}$$

Z okrajových podmínek dostaneme pro $p \neq q$ konstanty

$$c_1 = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}, \quad c_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a},$$

tedy

$$u_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}, \quad i = 1, \ldots, a-1.$$

Pro $p = q$ z okrajových podmínek dostaneme

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{a},$$

tedy

$$u_i = 1 - \frac{i}{a}, \quad i = 1, \ldots a-1.$$

Uvažujme ještě náhodnou veličinu W_j, která značí celkový počet časových okamžiků, které řetězec stráví v přechodném stavu j; zřejmě

$$W_j = \begin{cases} N_j & X_0 = i \neq j \\ N_j + 1, & X_0 = j \end{cases}.$$

Pro střední hodnotu náhodné veličiny W_j máme

$$E_i W_j = E_i N_j = E_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} I(X_n = j) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \quad i, j \in T, i \neq j,$$

$$E_j W_j = E_j N_j + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} + 1 \quad j \in T,$$

a protože $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, dostáváme

$$E_i W_j = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in T.$$

Je-li množina T konečná, potom s přihlédnutím k lemmatu 2.21 můžeme psát

$$E_i W_j = \varphi_{ij}, \quad i, j \in T,$$

kde φ_{ij} jsou odpovídající prvky fundamentální matice $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}$.

Označíme-li ještě jako $W = \sum_{j \in T} W_j$ celkový počet časových okamžiků strávených v množině přechodných stavů T, potom

$$E_i W = \sum_{j \in T} E_i W_j = \boldsymbol{F}_i \mathbf{1},$$

kde $\boldsymbol{F}_i$ je řádek matice $\boldsymbol{F}$ odpovídající počátečnímu stavu i a $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ (sloupcový vektor.)

Zatím víme, že je-li S (a tedy i T) konečná množina, potom $P_i(\tau = \infty) = 0$, $i \in T$ a soustava rovnic (2.27), resp. (2.29) má jediné řešení, které v maticovém tvaru je $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}$, kde $\boldsymbol{F}$ je fundamentální matice. V případě, že S není konečná, může být, jak jsme ukázali na příkladě 2.13, $P_i(\tau = \infty) > 0$ a nabízí se také otázka, zda soustava (2.27) má jediné řešení. Tento problém řeší následující věta.

Věta 2.22. *Soustava rovnic (2.27) má jediné řešení $0 \le u_{ij} \le 1$, $i \in T, j \in T^c$ tehdy a jen tehdy, když soustava rovnic*

$$x_i = \sum_{j \in T} p_{ij} x_j, \quad i \in T \tag{2.34}$$

nemá jiné řešení $0 \le x_i \le 1$ než triviální, t. j. $x_i = 0$ $\forall i \in T$. Tato podmínka je ekvivalentní podmínce

$$P_i(\tau = \infty) = 0, \quad i \in T. \tag{2.35}$$

Důkaz. Je uveden v knize Resnick (1992), Proposition 2.11.1; zde ukážeme jen ekvivalenci podmínek (2.34) a (2.35).

Označme $v_i = P_i(\tau = \infty)$, $i \in T$. Ukážeme, že v_i řeší (2.34). Nechť $v_i^{(n)} = P_i(\tau > n)$ je pravděpodobnost, že v čase n je řetězec ještě v množině přechodných stavů. Potom

$$\begin{aligned} v_i^{(0)} &= P_i(\tau > 0) = 1, \quad i \in T \\ v_i^{(1)} &= P_i(\tau > 1) = P_i(X_1 \in T) = \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} \\ v_i^{(n+1)} &= P_i(x_1 \in T, \dots, X_{n+1} \in T) = \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} v_\nu^{(n)}, \quad n \ge 0. \end{aligned}$$

Protože pro jevy $A_n = [\tau > n]$ platí $A_{n+1} \subset A_n \subset \dots$, je $v_i = \lim_{n\to\infty} v_i^{(n)}$ a tedy

$$v_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} v_\nu^{(n)} = \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} v_\nu$$

(limitní přechod za sčítacím znaménkem jsme oprávněni udělat, neboť $0 \le p_{i\nu} v_\nu \le p_{i\nu}$ a $\sum_{\nu \in T} p_{i\nu} \le 1$.)

Nechť $0 \le \widetilde{v}_i \le 1$ je nyní jiné řešení (2.34). Ukážeme, že $\widetilde{v}_i \le v_i, i \in T$. Platí

$$\widetilde{v}_i = \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} \widetilde{v}_\nu \le \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} = v_i^{(1)},$$

odtud indukcí podle n dostaneme

$$\widetilde{v}_i \le v_i^{(n)} \text{ pro každé } n,$$

neboť s využitím indukčního předpokladu, že vztah platí pro nějaké k

$$\widetilde{v}_i = \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} \widetilde{v}_\nu \le \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} v_\nu^{(k)} = v_i^{(k+1)}.$$

Odtud limitním přechodem

$$\widetilde{v}_i \leq \lim_{n\to\infty} v_i^{(n)} = v_i, \quad i \in T.$$

Je-li tedy $v_i = 0\ \forall i \in T$, je to jediné řešení (2.34) v intervalu $[0,1]$, má-li naopak (2.34) jen triviální řešení, je $v_i = 0\ \forall i \in T$.

□

V příkladě 2.13 jsme ukázali řetězec se spočetnou množinou stavů, které byly všechny přechodné. Následující věta nám umožní rozhodnout, zda v řetězci s nekonečně mnoha stavy jsou všechny stavy trvalé nebo všechny přechodné.

Věta 2.23. *V nerozložitelném řetězci s množinou stavů $S = \{0, 1, \dots,\}$ jsou všechny stavy trvalé tehdy a jen tehdy, když jediné řešení soustavy rovnic*

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2 \dots \tag{2.36}$$

v intervalu $[0,1]$ je triviální řešení $x_i = 0, i = 1, 2 \dots$. Všechny stavy jsou přechodné tehdy a jen tehdy, když (2.36) má v $[0,1]$ netriviální řešení.

Důkaz. Uvažujme podmnožinu stavů $T = \{1, 2, \dots\}$ a rozklad $S = \{0\} \cup T$. Potom

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\} = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$$

je čas výstupu z T a stejně jako ve větě 2.22 lze ukázat,že $x_i = 0$ je jediné řešení soustavy rovnic (2.36) v intervalu $[0,1]$ právě tehdy, když platí (2.35), t. j. když $P_i(\tau = \infty) = 0, i = 1, 2, \dots$. (V důkazu věty 2.22 se nikde nevyužilo, že T je množina stavů přechodných.) Pro $i \neq 0$ je

$$P_i(\tau = \infty) = 1 - P_i(\tau < \infty) = 1 - f_{i0}.$$

Nechť všechny stavy jsou trvalé; potom podle věty 2.15 $f_{i0} = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \dots,$ tedy platí (2.35) a tudíž (2.36). Nechť naopak jediné řešení (2.36) v $[0,1]$ je triviální, potom platí (2.35) a tedy $f_{i0} = 1, i = 1, 2 \dots$. Potom ale

$$f_{00} = P_0(\tau_0(1) < \infty) = p_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} p_{0i} f_{i0} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{0i} = 1,$$

tudíž stav 0 je trvalý. Protože řetězec je nerozložitelný, jsou všechny stavy trvalé.

Pro přechodné stavy se postupuje analogicky.

□

V dalším odstavci si ukážeme další kritéria pro klasifikaci stavů a budeme se podrobněji zabývat limitními vlastnostmi pravděpodobností přechodu.

2.6. Stacionární rozdělení

Definice. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$. Nechť $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ je nějaké pravděpodobnostní rozdělení na množině S, t. j. $\pi_j \geq 0, j \in S$, $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$. Potom $\boldsymbol{\pi}$ se nazývá *stacionární rozdělení* daného řetězce, jestliže platí

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{P}, \tag{2.37}$$

neboli

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \quad j \in S,$$

když uvažujeme sloupcové vektory.

Následující věta ukazuje souvislost právě uvedeného pojmu s pojmem striktní stacionarita procesu, který jsme definovali v první kapitole.

Věta 2.24. *Nechť počáteční rozdělení homogenního Markovova řetězce je stacionární ve smyslu (2.37). Potom Markovův řetězec je striktně stacionární náhodný proces, t. j. pro všechna $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ a libovolná $i_0, \ldots, i_n \in S$ platí*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P(X_k = i_0, X_{k+1} = i_1, \ldots, X_{k+n} = i_n).$$

Speciálně, pro absolutní pravděpodobnosti platí

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \pi_j, \quad j \in S,$$

kde π_j jsou počáteční stacionární pravděpodobnosti.

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{\pi}$ je stacionární rozdělení. Nejprve dokážeme indukcí, že pro každé $n \geq 1$ platí

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{P}^n, \tag{2.38}$$

t. j.

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}^{(n)} \quad j \in S.$$

Pro $n = 1$ plyne tento vztah z definice; platí-li pro nějaké $n \geq 1$, potom

$$\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{P}^{n+1} = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{P}^n \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}^T.$$

Nechť π je počáteční rozdělení. Potom podle (2.9) máme ihned pro absolutní pravděpodobnosti

$$p(n)^T = \pi^T P^n = \pi^T.$$

S využitím věty 2.1 a (2.38) máme

$$P(X_k = i_0, X_{k+1} = i_1, \ldots, X_{k+n} = i_n) =$$
$$\sum_{j \in S} P(X_0 = j, X_k = i_0, \ldots, X_{k+n} = i_n) = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji_0}^{(k)} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$$
$$= \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n} = P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n).$$

□

Věta 2.25. *Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec. Potom platí:*

(i) Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, stacionární rozdělení neexistuje.

(ii) Jsou-li všechny stavy trvalé nenulové, stacionární rozdělení existuje a je jediné. Jsou-li všechny stavy neperiodické, potom pro stacionární pravděpodobnosti π_j platí

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0, \quad i, j \in S$$

a rovněž

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) > 0, \quad j \in S.$$

Jsou-li všechny stavy periodické, platí

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0, \quad i, j \in S,$$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j(k) > 0, \quad j \in S.$$

Důkaz.

(i) Jsou-li všechny stavy přechodné nebo trvalé nulové, platí podle věty 2.9 $p_{ij}^{(n)} \to 0$ při $n \to \infty$ $\forall i, j \in S$. Předpokládejme, že stacionární rozdělení existuje. Potom podle (2.38) $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}$, takže po provedení limitního přechodu při $n \to \infty$ (jsme oprávněni ho provést) máme pro všechna $j \in S$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in S} \pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,$$

což je ovšem spor, protože potom $\{\pi_j\}$ není pravděpodobnostní rozdělení.

(ii) Jsou-li všechny stavy trvalé nenulové, potom podle věty 2.15 $f_{ij} = 1, \forall i, j \in S$. Jsou-li všechny neperiodické, potom podle věty 2.9 (ii) $p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} \forall i, j \in S$, kde $\mu_j > 0$, $j \in S$. Jsou-li všechny periodické se stejnou periodou, potom podle věty 2.9 (iii) $\overline{p}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to \frac{1}{\mu_j}$ pro $i \neq j$, podle téhož tvrzení ale snadno ukážeme, že stejný výsledek platí i pro $\overline{p}_{jj}^{(n)}$. Dále lze ukázat, že (2.38) platí, když $p_{ij}^{(n)}$ nahradíme $\overline{p}_{ij}^{(n)}$. Stačí tedy důkaz provést pro stavy neperiodické a v důkazu pro stavy periodické místo $p_{ij}^{(n)}$ všude psát $\overline{p}_{ij}^{(n)}$.

Nyní ukážeme, že stacionární rozdělení existuje. Vyjděme ze vztahu

$$p_{kj}^{(n+1)} = \sum_{i \in S} p_{ki}^{(n)} p_{ij}, \quad k, j \in S.$$

Je-li S konečná, limitním přechodem pro $n \to \infty$ odtud ihned dostaneme

$$\frac{1}{\mu_j} = \sum_{i \in S} \frac{1}{\mu_i} p_{ij}, \quad j \in S. \tag{2.39}$$

Je-li S nekonečně spočetná, pišme

$$p_{kj}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ki}^{(n)} p_{ij} \geq \sum_{i=0}^{N} p_{ki}^{(n)} p_{ij}, \quad N > 0,$$

odtud pro pevné N limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme

$$\frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{\mu_i} p_{ij}$$

a limitním přechodem pro $N \to \infty$

$$\frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} p_{ij}, \quad j \in S.$$

Pokud by pro nějaké j platila poslední nerovnost s ostrým znaménkem, muselo by po sečtení být

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} > \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} p_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i},$$

což vede ke sporu. Vidíme tedy, že vztah (2.39) opět platí. Vzhledem k tomu, že

$$\sum_{j=0}^{N} p_{kj}^{(n)} \leq \sum_{j \in S} p_{kj}^{(n)} = 1,$$

je $\sum_{j\in S} \frac{1}{\mu_j} \le 1$. Potom vektor $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$, kde

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} \left(\sum_{i\in S} \frac{1}{\mu_i} \right)^{-1}, \quad j \in S,$$

je vektor rozdělení, který splňuje (2.39) a tudíž (2.37), je to tedy stacionární rozdělení.

Protože $\boldsymbol{\pi}$ je stacionární rozdělení, platí také

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in S,$$

odkud limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S} \pi_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$$

(musí tudíž platit $\sum_{j\in S} \frac{1}{\mu_j} = 1$).

Nechť $\{v_j, j \in S\}$ je jiné stacionární rozdělení. Potom pro každé $j \in S$ musí platit

$$v_j = \sum_{i\in S} v_i p_{ij} = \sum_{i\in S} v_i p_{ij}^{(n)}$$

a odtud limitním přechodem opět $v_j = \sum_{i\in S} v_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$; existuje tedy jediné stacionární rozdělení a platí

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} > 0, \quad i, j \in S.$$

Pro absolutní pravděpodobnosti podle (2.9) platí

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} p_i(0) p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S} p_i(0) \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j, \quad j \in S.$$

□

Poznámka. Vztah $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, $i, j \in S$ lze maticově vyjádřit jako

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\Pi},$$

kde

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}^T \\ \boldsymbol{\pi}^T \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Věta 2.26. *V nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozdělení existuje.*

Důkaz. Důsledek vět 2.18 a 2.25.

□

Příklad 2.16. Uvažujme model havarijního pojištění z příkladu 2.7. Ukázali jsme, že kategorie pojistného X_n v $n-$ tém pojistném období tvoří Markovův řetězec se stavy $0, 1, 2$, s počátečním rozdělením $\boldsymbol{p} = (1, 0, 0)^T$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-a_0 & a_0 & 0 \\ 1-a_0 & 0 & a_0 \\ 1-a_0-a_1 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

kde $a_0 = e^{-\lambda}$, $a_1 = \lambda e^{-\lambda}$.

Řetězec je nerozložitelný, všechny stavy jsou trvalé nenulové. Stacionární rozdělení existuje a je určeno jako řešení (2.37), t. j. jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0(1-a_0) + \pi_1(1-a_0) + \pi_2(1-a_0-a_1), \\ \pi_1 &= \pi_0 a_0 + \pi_2 a_1, \\ \pi_2 &= \pi_1 a_0 + \pi_2 a_0, \end{aligned}$$

což je

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1-a_0-a_0a_1}{1-a_0a_1} = \frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}} \\ \pi_1 &= \frac{a_0(1-a_0)}{1-a_0a_1} = \frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-2\lambda}} \\ \pi_2 &= \frac{a_0^2}{1-a_0a_1} = \frac{e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}. \end{aligned}$$

Je-li výše základního pojistného V, potom střední výše pojistného, kterou pojištěný zaplatí v dlouhodobém časovém horizontu, je při uvedeném systému bonusů rovna $\pi_0 V + 0,7\pi_1 V + 0,5\pi_2 V$.

Příklad 2.17. Existence stacionárního rozdělení lze užít jako kriteria ke klasifikaci stavů. Uvažujme řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1, \dots\}$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Řetězec je nerozložitelný, všechny stavy jsou tedy stejného typu. Pokud stacionární rozdělení existuje, musí být kladným řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \pi_0 &= q\pi_0 + q\pi_1 \\ \pi_1 &= p\pi_0 + q\pi_2 \\ &\vdots \\ \pi_j &= p\pi_{j-1} + q\pi_{j+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Postupným řešením těchto rovnic dostaneme

$$\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0, \quad j = 0, 1, \dots, \ \pi_0 > 0.$$

Z podmínky $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ dostaneme pro $\frac{p}{q} < 1$ řešení

$$\pi_0 = 1 - \frac{p}{q}, \quad \pi_j = (1 - \frac{p}{q}) \left(\frac{p}{q}\right)^j, \quad j \geq 1.$$

Pro $p < q$ tedy stacionární rozdělení existuje, všechny stavy tudíž jsou trvalé nenulové. Pro $p \geq q$ stacionární rozdělení neexistuje a všechny stavy jsou buď trvalé nulové, nebo všechny přechodné. O tom, který případ nastane, můžeme nyní rozhodnout podle věty 2.23. Soustava (2.36) má v našem případě tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= px_2 \\ x_i &= qx_{i-1} + px_{i+1}, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Na tuto soustavu můžeme pohlížet jako na diferenční rovnici

$$px_{i+1} - x_i + qx_{i-1} = 0, \quad i \geq 1$$

s okrajovou podmínkou $x_0 = 0$. To je stejná diferenční rovnice jako rovnice (2.33), jejíž řešení jsme určili v příkladě 2.15. Zjistili jsme, že její obecné řešení je

$$\begin{aligned} x_i &= c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^i & p &\neq q, \\ x_i &= c_1 + ic_2 & p &= q. \end{aligned}$$

Při okrajové podmínce $x_0 = 0$ dostaneme řešení

$$\begin{aligned} x_i &= A(1 - (\frac{q}{p})^i) & p &> q, \\ x_i &= Bi & p &= q, \end{aligned}$$

kde A, B jsou nějaké konstanty. Vidíme tedy, že pro $p > q$ v intervalu $[0, 1]$ existuje netriviální řešení soustavy (2.36), všechny stavy jsou tudíž přechodné; pro $p = q$ v intervalu $[0, 1]$ neexistuje jiné řešení než triviální, všechny stavy jsou v tomto případě trvalé nulové.

Příklad 2.18. Řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1, \dots\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

je nerozložitelný, ale stacionární rozdělení v něm neexistuje, neboť soustava (2.37) je

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \dots \\ \pi_j &= \frac{j}{j+1}\pi_{j-1} = \frac{1}{j+1}\pi_0, \quad j = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

Protože $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1}$ nekonverguje pro žádné $\pi_0 > 0$, neexistuje žádné kladné řešení (2.37). Protože řetězec je nerozložitelný, musí být všechny stavy buď přechodné, nebo všechny trvalé nulové. Opět můžeme rozhodnout podle věty 2.23. Soustava (2.36) je

$$x_j = \frac{j+1}{j+2} x_{j+1}, \quad j = 1, 2 \dots,$$

odtud

$$x_j = \frac{j+1}{2} x_1, \quad j = 1, 2 \dots$$

a jediné řešení v intervalu $[0,1]$ je $x_j = 0$, $\forall j$. Všechny stavy jsou trvalé nulové (a neperiodické, neboť $p_{00} > 0$).

2.7. Limitní věty pro četnosti návratů

Uvažujme nerozložitelný řetězec, ve kterém jsou všechny stavy trvalé nenulové. Víme, že v takovém řetězci existuje stacionární rozdělení $\{\pi_j, j \in S\}$ a z důkazu věty 2.25 plyne, že toto stacionární rozdělení je jediné a platí

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0, \quad j \in S,$$

kde $\mu_j = E_j\tau_j(1) = E_jT_1$ je střední doba prvního návratu do stavu j.

Nechť $N_j(n)$ značí náhodnou veličinu, která udává, kolikrát v prvních n krocích řetězec projde stavem j (kolikrát se vrátí do stavu j), t.j.

$$N_j(n) = \sum_{\nu=1}^{n} I(X_\nu = j).$$

Potom platí pro $k = 1, 2 \ldots$

$$[N_j(n) < k] \Longleftrightarrow [\tau_j(k) > n],$$

kde $\tau_j(k)$ je čas $k-$tého návratu do stavu j. Vzhledem k tomu, že řetězec je nerozložitelný a všechny stavy jsou trvalé, je $P_i(\tau_j(k) < \infty) = 1$ $\forall i, j \in S$, $\forall k = 1, 2 \ldots$.

Nyní můžeme dokázat analogii silného zákona velkých čísel pro relativní četnost návratů do stavu j.

Věta 2.27. *V nerozložitelném řetězci s trvalými nenulovými stavy platí*

$$\frac{N_j(n)}{n} \to \pi_j \quad \text{při } n \to \infty \text{ s pravděpodobností 1}$$

pro každé $j \in S$.

Důkaz. Zřejmě platí tyto vztahy mezi náhodnými jevy:

$$\left[\frac{N_j(n)}{n} - \pi_j < \varepsilon\right] = [N_j(n) < n(\pi_j + \varepsilon)] \supseteq [N_j(n) < Z],$$

kde jsme pro zjednodušení zápisu jako Z označili celou část čísla $n(\pi_j + \varepsilon)$, a dále

$$[N_j(n) < Z] = [\tau_j(Z) > n] = \left[\frac{\tau_j(Z)}{Z} > \frac{n}{Z}\right] \supseteq \left[\frac{\tau_j(Z)}{Z} > \frac{n}{n(\pi_j + \frac{\varepsilon}{2})}\right]$$
$$= \left[\frac{\tau_j(Z)}{Z} - \frac{1}{\pi_j} > -\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\pi_j(\pi_j + \frac{\varepsilon}{2})}\right].$$

Víme, že $\tau_j(Z) = \sum_{k=1}^{Z} T_k$, kde $T_1, T_2, \ldots, T_Z$ jsou podle věty 2.5 nezávislé náhodné veličiny; vychází-li řetězec ze stavu j, mají všechny stejné rozdělení s konečnou střední hodnotou $\mu_j = \frac{1}{\pi_j}$ a platí pro ně silný zákon velkých čísel, t.j.

$$\frac{\tau_j(Z)}{Z} \to \frac{1}{\pi_j} \quad \text{pro } Z \to \infty \quad \text{s pravděpodobností 1} \tag{2.40}$$

(viz např. Štěpán (1987), věta IV.2.2).

Vychází-li řetězec z jiného stavu než j, mají stejné rozdělení pouze $T_2, \ldots, T_Z$, ale T_1 je s pravděpodobností 1 konečná. Odtud opět dostaneme (2.40).

Platí tedy $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0\ \exists\ Z_0 = Z_0(\varepsilon, \delta)$ přirozené tak, že

$$P\left(\frac{\tau_j(Z)}{Z} - \frac{1}{\pi_j} > -\varepsilon \quad \forall\, Z > Z_0\right) > 1 - \delta.$$

Protože $Z \to \infty \iff n \to \infty$, plyne odtud, že $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ tak, že

$$P\left(\frac{N_j(n)}{n} - \pi_j < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0\right) > 1 - \delta.$$

Podobnými úvahami dospějeme k závěru, že $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ tak, že

$$P\left(\frac{N_j(n)}{n} - \pi_j > -\varepsilon \quad \forall\, n > n_0\right) > 1 - \delta,$$

odkud již plyne tvrzení věty.

□

Uvažujme opět nerozložitelný řetězec s trvalými nenulovými stavy (střední doba návratu μ_j do stavu j je konečná) a předpokládejme, že také rozptyly $\sigma_j^2 = \mathrm{var}_j(\tau_j(1))$ jsou konečné. Potom lze dokázat následující analogii centrální limitní věty pro četnost návratů do stavu j.

Věta 2.28. *V nerozložitelném řetězci s trvalými nenulovými stavy a konečnými rozptyly dob návratu platí*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_j(n)-\frac{n}{\mu_j}}{\sqrt{n\sigma_j^2/\mu_j^3}} \le x\right) = \Phi(x), \tag{2.41}$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Věta 2.28 tvrdí, že pro velká n je náhodná veličina $N_j(n)$ asymptoticky normální se střední hodnotou

$$EN_j(n) \simeq n\frac{1}{\mu_j}$$

a rozptylem

$$\operatorname{var} N_j(n) \simeq n\frac{\sigma_j^2}{\mu_j^3}.$$

Důkaz. Větu dokážeme podrobně jen pro případ, že řetězec vychází ze stavu j. Vzhledem k tomu, že $N_j(n)$ je celočíselná náhodná veličina, platí

$$P\left(\frac{N_j(n)-\frac{n}{\mu_j}}{\sqrt{n\sigma_j^2/\mu_j^3}} \le x\right) = P(N_j(n) < r),$$

kde r je nejmenší celé číslo větší než $\frac{n}{\mu_j} + x\sigma_j\sqrt{n/\mu_j^3}$, t. j.

$$r = \frac{n}{\mu_j} + x\sigma_j\sqrt{\frac{n}{\mu_j^3}} + \theta, \quad 0 < \theta \le 1.$$

Dále,

$$P(N_j(n) < r) = P(\tau_j(r) > n) = P\left(\frac{\tau_j(r) - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}} > \frac{n - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}}\right)$$

a snadno ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}} = -x.$$

Protože $\tau_j(r)$ je součet r nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin a $n \to \infty \iff r \to \infty$, plyne z centrální limitní věty (Štěpán (1987), věta IV.3.4), že

$$\lim_{r\to\infty} P\left(\frac{\tau_j(r) - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}} > \frac{n - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}}\right) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

$\square$

Příklad 2.19. V určitém psychologickém experimentu je pokusnému subjektu předložen obrázek, který lze vnímat dvěma způsoby (např. na vhodně narýsovaný obraz krychle můžeme nahlížet buď z nadhledu nebo podhledu). Obrázek je osvětlován zábleskem v pevných časových intervalech; délka intervalu je volena tak, že jedinec je schopen si pamatovat předchozí vjem.[1] Tento proces vnímání může tedy být popsán Markovovým řetězcem $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se dvěma stavy 0 a 1, které odpovídají dvěma různým výpovědím pokusného subjektu, a maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

kde $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. Řetězec je nerozložitelný, oba stavy jsou trvalé nenulové a v řetězci existuje jediné stacionární rozdělení. Řešením soustavy (2.37) dostaneme

$$\pi_0 = \frac{b}{a+b}, \quad \pi_1 = \frac{a}{a+b}.$$

Rozdělení dob návratu do stavu 0, t. j. náhodné veličiny $\tau_0(1) = T_1$ a náhodných veličin $T_2 = \tau_0(2) - \tau_0(1), \ldots$, je dáno větou 2.5. Přímým výpočtem dostaneme

$$P(T_1 = n | X_0 = 0) = P_0(\tau_0(1) = n) = f_{00}^{(n)},$$

kde

$$f_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1-a, & n = 1 \\ ab(1-b)^{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

(stačí si uvědomit, že v tomto případě $f_{00}^{(n)} = P(X_1 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 0 | X_0 = 0)$) a podobně

$$P(T_1 = n | X_0 = 1) = P_1(\tau_0(1) = n) = f_{10}^{(n)},$$

kde

$$f_{10}^{(n)} = b(1-b)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Vychází-li řetězec ze stavu 0, jsou náhodné veličiny $T_1, T_2, \ldots$ nezávislé a stejně rozdělené s rozdělením $\{f_{00}^{(n)}\}$. Střední hodnota a rozptyl tohoto rozdělení jsou

$$\mu_0 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{a+b}{b}, \quad \sigma_0^2 = \frac{a(2-a-b)}{b^2}.$$

Vychází-li řetězec ze stavu 1, má náhodná veličina T_1 rozdělení $\{f_{10}^{(n)}\}$ se střední hodnotou $\frac{1}{b}$ a rozptylem $\frac{1-b}{b^2}$.

[1]Havránek, T. a kol. (1981): Matematika pro biologické a lékařské vědy, Academia, Praha

Náhodná veličina $N_0(n)$, která v našem případě udává počet odpovědí typu 0 v prvních n pokusech, tedy má při dostatečně velkém počtu pokusů přibližně normální rozdělení

$$\mathcal{N}\left(\frac{nb}{a+b}, \frac{nab(2-a-b)}{(a+b)^3}\right).$$

Je-li $a+b=1$, tento vztah se zjednoduší na

$$N_0(n) \sim \mathcal{N}(nb,\ nb(1-b)).$$

Podobně lze určit přibližné rozdělení počtu odpovědí typu 1.

2.8. Markovovy řetězce s oceněním přechodů

Uvažujme nerozložitelný Markovův řetězec s konečnou množinou stavů, ve kterém jsou všechny stavy trvalé nenulové (víme, že toto plyne z věty 2.18) a neperiodické. Vedle matice pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$ uvažujme ještě matici ocenění přechodů $\boldsymbol{Z} = \{z_{ij}, i,j \in S\}$. Předpokládáme tedy, že s přechodem ze stavu i do stavu j za jednotku času je spojen zisk (nebo náklad) z_{ij}. Očekávaný výnos spojený s realizací jednoho přechodu (za jedno období) ze stavu i je tudíž $q_i = \sum_{j\in S} z_{ij}p_{ij}$.

Obecněji, nechť $v_i(n)$ značí očekávaný výnos za n období (za dobu n), když na počátku byl řetězec ve stavu i, nechť $\boldsymbol{v}(n) = \{v_i(n),\ i \in S\}$. Položme $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{0}$ a označme $\boldsymbol{q} = \{q_i, i \in S\}$. Nyní můžeme dokázat toto tvrzení:

Věta 2.29. *Pro střední výnos za dobu n platí rekurentní vztah*

$$\boldsymbol{v}(n) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}(n-1), \quad n \geq 1\,, \tag{2.42}$$

kde $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{v}(1)$ je střední výnos za jedno období.

Důkaz. Realizace $(X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$ dává výnos $z_{ii_1} + z_{i_1i_2} + \cdots + z_{i_{n-1}i_n}$; pravděpodobnost této realizace je $p_ip_{ii_1}\ldots p_{i_{n-1}i_n}$. Střední výnos za n období při počátečním stavu i je tedy roven

$$
\begin{aligned}
v_i(n) &= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} (z_{ii_1} + z_{i_1 i_2} + \cdots + z_{i_{n-1} i_n}) p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \\
&= \sum_{i_1} p_{ii_1} \Bigg[z_{ii_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} + \\
&\quad + \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} (z_{i_1 i_2} + \cdots + z_{i_{n-1} i_n}) p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \Bigg] \\
&= \sum_{i_1} p_{ii_1} z_{ii_1} + \sum_{i_1} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1) = q_i + \sum_{i_1} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1),
\end{aligned}
$$

kde $q_i = \sum_j p_{ij} z_{ij} = v_i(1)$ je střední výnos za jedno období, když řetězec je na počátku ve stavu i, $i \in S$.

□

Opakovaným použitím rekurentního vzorce (2.42) dostaneme

$$
(2.43) \qquad \boldsymbol{v}(n) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}(n-1) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}(n-2)) = \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{P}^k \boldsymbol{q}.
$$

Vzhledem k předpokladům, které jsme učinili, platí

$$
\boldsymbol{P}^k \to \boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}^T \end{pmatrix} \text{ pro } k \to \infty,
$$

kde $\boldsymbol{\pi}$ je vektor stacionárního rozdělení. Z vlastností stacionárního rozdělení plyne, že $\boldsymbol{P\Pi} = \boldsymbol{\Pi}$, $\boldsymbol{\Pi P} = \boldsymbol{\Pi}$ a také $\boldsymbol{\Pi}^2 = \boldsymbol{\Pi}$. Máme tedy

$$
(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi})^2 = \boldsymbol{P}^2 - \boldsymbol{\Pi P} - \boldsymbol{P\Pi} + \boldsymbol{\Pi}^2 = \boldsymbol{P}^2 - \boldsymbol{\Pi}
$$

a indukcí pro $k \geq 1$ dostaneme podobně

$$
(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi})^k = \boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi}.
$$

Matice $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}$ je čtvercová a platí

$$
(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi})^k = \boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi} \to \boldsymbol{0} \text{ pro } k \to \infty,
$$

tedy podle věty B.2 Dodatku B existuje matice $(\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1}$ a platí

$$(\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi})^k = \boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi}).$$

$k=0$ $\quad P^0 - \Pi$

Je tudíž

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi}) = (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} - \boldsymbol{\Pi}$$

konvergentní maticová řada a vztah (2.43) můžeme dále upravit na tvar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{P}^k \boldsymbol{q} = \sum_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi})\boldsymbol{q} + n\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi})\boldsymbol{q} - \sum_{k=n}^{\infty} (\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi})\boldsymbol{q} + n\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q} \\
&= (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q} - \sum_{k=n}^{\infty} (\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{\Pi})\boldsymbol{q} + n\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q} \\
&= (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi})^n\boldsymbol{q} + n\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q}. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Pro dostatečně velké n lze zanedbat zbytek konvergentní řady v (2.44), takže přibližně lze psát

$$\boldsymbol{v}(n) \simeq (n-1)\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q} + (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1}\boldsymbol{q}.$$

Příklad 2.20. Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jakou úspěšný (stav 0) a neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období a dynamika prodeje je popsána Markovovým řetězcem. Předpokládejme, že matice pravděpodobností přechodu je

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

a odpovídající matice ocenění

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Snadno spočteme, že

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & -0,4 \\ -0,6 & 1,6 \end{pmatrix}$$

a pro vektor $\boldsymbol{q}$ se složkami $q_i = \sum_j p_{ij} z_{ij}$ máme $\boldsymbol{q} = (9, -11)^T$. Očekávaný výnos z prodeje za n období tedy je pro velké n

$$\boldsymbol{v}(n) \simeq (n + 16, n - 24)^T.$$

Dosud jsme předpokládali, že výnosy (náklady) spojené s realizací řetězce v dalším období se kalkulují na konci předcházejícího období, t.j. v čase 0 na první období, v čase 1 na druhé období atd. Předpokládejme nyní, že kapitál je úročen a uvažujme tyto výnosy (náklady) přepočtené k počátečnímu okamžiku: jestliže se uskuteční přechod ze stavu i v čase k do stavu j v čase $k+1$ a toto ocenění má v čase k hodnotu z_{ij}, potom ocenění tohoto přechodu přepočítané k počátečnímu okamžiku je $\beta^k z_{ij}$, kde $0 < \beta < 1$ je odúročitel (diskontní faktor). Střední výnos za n období diskontovaný k počátečnímu okamžiku je (v případě, že řetězec je na počátku ve stavu i)

$$\begin{aligned} v_i(n) &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} (z_{ii_1} + \beta z_{i_1 i_2} + \cdots + \beta^{n-1} z_{i_{n-1} i_n}) p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \\ &= \sum_{i_1} p_{ii_1} (z_{ii_1} + \beta \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} (z_{i_1 i_2} + \beta z_{i_2 i_3} + \cdots + \beta^{n-2} z_{i_{n-1} i_n}) p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \\ &= \sum_{i_1} p_{ii_1} z_{ii_1} + \beta \sum_{i_1} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1) = q_i + \beta \sum_{i_1} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1), \end{aligned}$$

maticově

$$\boldsymbol{v}(n) = \boldsymbol{q} + \beta \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}(n-1), \quad n \geq 1. \tag{2.45}$$

Věta 2.30. *Pro diskontovaný střední výnos platí*

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{v}(n) = (\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{P})^{-1} \boldsymbol{q}.$$

Důkaz. Z rekurentního vztahu (2.45) dostaneme

$$\boldsymbol{v}(n) = \boldsymbol{q} + \beta \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}(n-1) = \boldsymbol{q} + \beta \boldsymbol{P}(\boldsymbol{q} + \beta \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}(n-2)) = \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \boldsymbol{P}^k \boldsymbol{q}.$$

Protože $0 < \beta < 1$ a $\boldsymbol{P}^k \to \boldsymbol{\Pi}$, konverguje matice $\beta^k \boldsymbol{P}^k$ k nulové matici. Podle vět B.3 a B.2 tedy

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{v}(n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \boldsymbol{P}^k \boldsymbol{q} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \boldsymbol{P}^k \boldsymbol{q} = (\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{P})^{-1} \boldsymbol{q}.$$

□

2.9. Cvičení a doplňky

Cvičení 2.1. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $S \subset \mathbb{N}_0$. Dokažte, že

$$P(X_{m+N} = k_N, X_{m+N-1} = k_{N-1}, \ldots, X_{m+1} = k_1 | X_m = i) =$$

$$= P(X_N = k_N, X_{N-1} = k_{N-1}, \ldots, X_1 = k_1 | X_0 = i),$$

pro každé $i, k_1, \ldots, k_N \in S$ a každé m, N přirozené.

Cvičení 2.2. *Model mísení dvou nestlačitelných kapalin.(D. Bernoulli, 1769).* Uvažujme dvě urny A, B, které obsahují celkem $2l$ koulí, z toho l bílých a l černých. V každém časovém okamžiku $n = 0, 1, \ldots$ probíhá proces mísení takto: v každé z uren náhodně zvolíme jednu kouli a přemístíme ji do druhé urny. Počet koulí v každé urně zůstává konstantní a je roven l. Stav systému v čase $n, n \in \mathbb{N}_0$ je popsán náhodnou veličinou X_n, která nabývá hodnoty i tehdy a jen tehdy, když v čase n je v urně A právě i bílých koulí, $0 \leq i \leq l$.

Dokažte, že posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ tvoří Markovův řetězec se stavy $0, 1, \ldots, l$ a najděte pravděpodobnosti přechodu.

Cvičení 2.3. *Model výměny tepla (T. a P. Ehrenfestovi, 1907).* Teploty dvou izolovaných těles jsou reprezentovány počtem koulí ve dvou urnách A, B. Celkem je v obou urnách umístěno $2l$ koulí, které jsou očíslovány $1, 2 \ldots, 2l$. K výměně tepla dochází podle tohoto schématu: v každém kroku se náhodně vytáhne jedno číslo mezi $1, \ldots, 2l$ a koule, jejíž číslo bylo vytaženo, se přemístí do druhé urny. Stav systému v čase $n, n \in \mathbb{N}_0$ je popsán náhodnou veličinou X_n, která nabývá hodnoty i tehdy a jen tehdy, když urna A obsahuje právě i koulí, $0 \leq i \leq 2l$.

Dokažte, že posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ tvoří Markovův řetězec se stavy $0, 1, \ldots, l$ a najděte pravděpodobnosti přechodu.

Cvičení 2.4. Je dán Galtonův-Watsonův proces větvení popsaný v příkladech 1.3 a 2.4. Nechť počet jedinců X_1 první generace má rozdělení $\{p_j, j \geq 0\}$ s vytvořující funkcí P_1, střední hodnotou μ_1 a rozptylem σ_1^2.

Dokažte, že pro počet jedinců X_n $n-$té generace platí

$$EX_n = \mu_n = \mu_1^n,$$

$$\operatorname{var} X_n = \sigma_n^2 = \begin{cases} n\sigma_1^2 & \mu_1 = 1 \\ \sigma_1^2 \mu_1^{n-1} \frac{\mu_1^n - 1}{\mu_1 - 1} & \mu_1 \neq 1. \end{cases}$$

Návod: Dokažte, že vytvořující funkce P_n náhodné veličiny X_n splňuje rekurentní vztah

$$P_n(s) = P_{n-1}(P_1(s)) = P_1(P_{n-1}(s)), \quad n \geq 2$$

a užijte vět A.1 a A.7 z Dodatku A.

Cvičení 2.5. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je počet jedinců n-té generace v Galtonově - Watsonově procesu větvení z příkladů 1.3 a 2.4 . Nechť $P(X_0 = 1) = 1$ a X_1 má rozdělení $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$ a pro $j \geq 3$ je $P(X_1 = j) = 0$. Spočtěte pravděpodobnosti přechodu p_{ij} v řetězci $\{X_n\}$.

Cvičení 2.6. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1, \dots\}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P} = \{p_{ij},\ i, j \in S\}$.

Dokažte, že pro rozdělení $f_{ij}^{(n)}$ doby prvního návratu do stavu j platí rekurentní vztah

$$f_{ij}^{(n)} = \begin{cases} p_{ij} & n = 1 \\ \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} & n > 1. \end{cases}$$

Návod. Pro $n = 1$ je vztah zřejmý, pro $n > 1$ platí

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= P_i[X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j] \\ &= \sum_{k \neq j} P_i[X_1 = k, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j] \\ &= \sum_{k \neq j} P_i[X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_1 = k] P_i[X_1 = k]. \end{aligned}$$

Odtud s využitím markovské vlastnosti a cvičení 2.1 již plyne výsledek.

Cvičení 2.7. Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů s výsledky *zdar - nezdar*, pravděpodobnost zdaru budiž p, $0 < p < 1$, pravděpodobnost nezdaru $q = 1 - p$. Definujme náhodné veličiny $X_n, n \geq 1$ tímto předpisem:

$X_n = 0$, když $n-$tý pokus skončil nezdarem, $X_n = k$, když $(n-k)-$tý pokus skončil nezdarem a pokusy $(n-k+1)-$ní až $n-$tý zdarem $(1 \leq k \leq n-1)$ a $X_n = n$, jestliže pokusy první až $n-$tý skončily zdarem.

Dokažte, že $\{X_n, n \geq 1\}$ je Markovův řetězec se stavy $0, 1 \dots$ s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Stejnou pravděpodobnostní úvahou odvoďte matice $\boldsymbol{P}^2, \boldsymbol{P}^3$.

Cvičení 2.8. Je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

S pomocí Perronova vzorce (Dodatek B, věta B.6) spočtěte matici $\boldsymbol{P}^n$ pravděpodobností přechodu n–tého řádu.

Cvičení 2.9. Uvažujte Markovův řetězec se stavy 0 a 1, s počátečním rozdělením $\boldsymbol{p} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

kde $0 < a < 1, \quad 0 < b < 1$.

Dokažte (s použitím Perronova vzorce, věta B.6), že

$$\boldsymbol{P}^n = \frac{1}{a+b}\left[\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}\right].$$

Spočtěte absolutní pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(n)$ a dále limity

$$\lim_{n\to\infty} p_i(n), \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 0, 1.$$

Cvičení 2.10. Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{Y_n, n \geq 1\}$ s alternativním rozdělením. Sledujme posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \geq 1\}$ definovaných předpisem

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{když} \quad Y_n = 1, Y_{n+1} = 1 \\ 2, & \text{když} \quad Y_n = 1, Y_{n+1} = 0 \\ 3, & \text{když} \quad Y_n = 0, Y_{n+1} = 1 \\ 4, & \text{když} \quad Y_n = 0, Y_{n+1} = 0 \end{cases} .$$

Ověřte, že $\{X_n\}$ je Markovovův řetězec a spočtěte pravděpodobnosti přechodu po n krocích.

Cvičení 2.11. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Cvičení 2.12. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 2.13. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 2.14. Uvažujme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte fundamentální matici tohoto řetězce a pravděpodobnost, že řetězec, který vychází ze stavu 2, dříve nebo později skončí ve stavu 4.

Cvičení 2.15. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

později

Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce, pokud existuje.

Cvičení 2.16. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce, pokud existuje.

Cvičení 2.17. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce, pokud existuje.

Cvičení 2.18. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce, pokud existuje.

Cvičení 2.19. Najděte stacionární rozdělení v řetězci popsaném v příkladě 2.7. Porovnejte výsledek s limitním rozdělením.

Cvičení 2.20. Matice $P = \{p_{ij}, i, j \in S\}$ s nezápornými prvky se nazývá *dvojně stochastická,* jestliže

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \ \forall i \in S, \quad \sum_{i \in S} p_{ij} = 1 \ \forall j \in S.$$

Dokažte tuto větu: *Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu, která je dvojně stochastická. Je-li řetězec konečný, je stacionární rozdělení rovnoměrné, t.j.* $\pi_j = \frac{1}{M}, 1 \le j \le M$, *kde* M *je počet stavů. Je-li řetězec nekonečný, stacionární rozdělení neexistuje.* (Dupač, Dupačová, I (1975).)

Cvičení 2.21. Vektor $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_j \geq 0, j \in S\}$ takový, že v řetězci s maticí pravděpodobností přechodu P a množinou stavů S platí

$$\boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\eta}^T P,$$

se nazývá *invariantní míra* na S vzhledem k P.

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je nerozložitelný řetězec, jehož všechny stavy jsou trvalé. Nechť $i \in S$ je pevné; potom vektor $\boldsymbol{\eta}^i = \{\eta^i_j, j \in S\}$, kde

$$\eta^i_j = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i(1)-1} I(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j, \tau_i(1) > n),$$

je invariantní míra na S vzhledem k $\boldsymbol{P}$ a platí $0 < \eta_j^i < \infty$ $\forall j \in S$ a $\eta_i^i = 1$. Tato invariantní míra je jediná až na multiplikativní konstantu. (Je zřejmé, že η_j^i udává průměrný počet vstupů do stavu j mezi dvěma vstupy do stavu i.)

Ukažte, že

$$\sum_{j \in S} \eta_j^i = E_i \tau_i(1),$$

tedy stacionární rozdělení v uvažovaném řetězci existuje právě tehdy, když $\sum_{j \in S} \eta_j^i < \infty$.

Návod. Je $P_i(\tau_i(1) < \infty) = 1$ (i je trvalý) a protože $X_0 = i$, $X_{\tau_i(1)} = i$, je $\eta_i^i = 1$ a

$$\eta_j^i = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j, \tau_i(1) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \neq i} P_i(X_n = j, X_{n-1} = k, \tau_i(1) \geq n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \neq i} P_i(X_n = j | X_{n-1} = k, \tau_i(1) \geq n) \; P_i(X_{n-1} = k, \tau_i(1) \geq n).$$

Dále platí pro $k \neq i$

$$[X_{n-1} = k, \tau_i(1) \geq n] = [X_1 \neq i, \ldots, X_{n-2} \neq i, X_{n-1} = k],$$

takže s využitím markovské vlastnosti

$$\eta_j^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \neq i} p_{kj} P_i(X_{n-1} = k, \tau_i(1) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in S} p_{kj} P_i(X_{n-1} = k, \tau_i(1) \geq n)$$
$$= \sum_{k \in S} p_{kj} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_{n-1} = k, \tau_i(1) \geq n) = \sum_{k \in S} p_{kj} \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = k, \tau_i(1) \geq n+1)$$
$$= \sum_{k \in S} p_{kj} \; E_i \sum_{n=0}^{\tau_i(1)-1} I(X_n = k) = \sum_{k \in S} p_{kj} \eta_k^i;$$

odtud je vidět, že $\boldsymbol{\eta}^i$ je invariantní míra vzhledem k $\boldsymbol{P}$ a také vzhledem k $\boldsymbol{P}^m$ pro libovolné přirozené m.

Protože řetězec je nerozložitelný, existují M, N přirozená taková, že $p_{ij}^{(M)} > 0$ a $p_{ji}^{(N)} > 0$, takže

$$\eta_j^i = \sum_{k \in S} p_{kj}^{(M)} \eta_k^i \geq p_{ij}^{(M)} \eta_i^i > 0$$

a podobně

$$1 = \eta_i^i = \sum_{k \in S} p_{ki}^{(N)} \eta_k^i \geq p_{ji}^{(N)} \eta_j^i,$$

odkud plyne, že $0 < \eta_j^i < \infty$. Zbytek tvrzení plyne z věty A.2 Dodatku A a věty 2.25.

3. MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM

3.1. Základní vlastnosti

Nyní se budeme zabývat Markovovými řetězci se spojitým časem.

Definice. Systém celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá *Markovův řetězec se spojitým časem* a spočetnou množinou stavů S, jestliže

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j | X_s = i) \tag{3.1}$$

pro všechna $i, j, i_1, \ldots, i_n \in S$ a pro všechna $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < s < t$, pro která $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) > 0$.

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $S = \{0, 1, \ldots\}$.
Vztah (3.1) vyjadřuje opět *markovskou vlastnost.*

Označme $P(X_t = j | X_s = i)$ jako $p_{ij}(s, t)$; tyto podmíněné pravděpodobnosti budeme nazývat *pravděpodobnosti přechodu* ze stavu i v čase s do stavu j v čase t. Podobně pravděpodobnosti $p_j(t) = P(X_t = j), j \in S$ budeme nazývat *absolutní pravděpodobnosti v čase* t a pravděpodobnosti $p_j = p_j(0) = P(X_0 = j), j \in S$ budou *počáteční pravděpodobnosti.* Zřejmě $p_j(t) \geq 0$ pro všechna $j \in S$ a $\sum_{j \in S} p_j(t) = 1, t \geq 0$.

Dále se budeme zabývat jen *homogenními* řetězci se spojitým časem, t. j. takovými, pro jejichž pravděpodobnosti přechodu platí

$$p_{ij}(s, s + t) = p_{ij}(t), \quad s \geq 0, t > 0.$$

Pro každé $i, j \in S$ tedy budeme uvažovat celý systém pravděpodobností $\{p_{ij}(t),\ t > 0\}$ takových, že $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$, neboli celý systém matic pravděpodobností přechodu $\{\boldsymbol{P}(t),\ t > 0.\}$ Je obvyklé definovat $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, t. j. $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$. Pokud nedojde k nedorozumění, budeme v dalším textu přívlastek "homogenní " vynechávat.

Podobně jako ve větě 2.1 lze ukázat, že všechna konečněrozměrná rozdělení homogenního Markovova řetězce $\{X_t,\ t \geq 0\}$ jsou určena vektorem počátečních pravděpodobností $\boldsymbol{p}(0) = \{p_i(0), i \in S\}$ a systémem matic pravděpodobností přechodu $\{\boldsymbol{P}(t), t \geq 0\}$: pro libovolné časové okamžiky $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ a libovolná $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ platí

(3.2)

$X_{t_2} = i_2$

$$P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_0}(0)p_{i_0 i_1}(t_1)p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1)\dots p_{i_{n-1} i_n}(t_{i_n} - t_{i_{n-1}}),$$

odtud speciálně dostáváme

$P(X_t = j) = \sum_{i \in S} P(X_t = j, X_0 = i)$

$$p_j(t) = P(X_t = j) = \sum_{i \in S} p_i(0)p_{ij}(t), \quad j \in S, \tag{3.3}$$

maticově

$$\boldsymbol{p}(t)^T = \boldsymbol{p}(0)^T \boldsymbol{P}(t).$$

Zcela analogicky jako pro Markovovy řetězce s diskrétním časem lze dokázat, že pro každé $s \geq 0, t \geq 0$

$$p_{ij}(s + t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \quad i, j \in S, \tag{3.4}$$

maticově

$$\boldsymbol{P}(s + t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t),$$

což je opět *Chapmanova-Kolmogorovova rovnost.*

Naopak lze také ukázat, že ke každému pravděpodobnostnímu vektoru $\boldsymbol{p} = \{p_i \geq 0, \sum_{i \in S} p_i = 1\}$ a každému systému stochastických matic $\{\boldsymbol{P}(t), t \geq 0\}$, které splňují Chapman-Kolmogorovovu rovnost, existuje homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, jehož počáteční pravděpodobnosti jsou dány vektorem $\boldsymbol{p}$ a systém matic pravděpodobností přechodu je právě $\{\boldsymbol{P}(t),\ t \geq 0\}$ (např. Chung (1967), str. 141–142).

V našich dalších úvahách budeme vždy předpokládat, že

$$\lim_{t \to 0_+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \quad i, j \in S, \tag{3.5}$$

což spolu s předpokladem $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ znamená, že pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ jsou spojité zprava v bodě 0. Můžeme však dokázat více:

Věta 3.1. *Platí-li (3.5), jsou pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ stejnoměrně spojité pro $t \geq 0$.*

Důkaz. Podle Chapman-Kolmogorovovy rovnosti (3.4) pro každé $h > 0$

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t)(1 - p_{ii}(h)),$$

dále

$$\sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \leq \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h),$$

takže

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq |1 - p_{ii}(h)| + |p_{ij}(t)(1 - p_{ii}(h))| \leq 2(1 - p_{ii}(h)). \tag{3.6}$$

Z (3.5) a (3.6) plyne, že $|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)|$ konverguje k nule při $h \to 0_+$ nezávisle na t. Podobně postupujeme pro $|p_{ij}(t) - p_{ij}(t-h)|$.

□

Věta 3.2. *Jestliže $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní řetězec se spojitým časem a platí (3.5), je také stochasticky spojitý.*

Důkaz. Stačí ukázat, že pro každé $t \geq 0$

$$\lim_{h \to 0_+} P(X_{t+h} = X_t) = 1, \quad \lim_{h \to 0_+} P(X_{t-h} = X_t) = 1.$$

Zřejmě

$$P(X_{t+h} = X_t) = \sum_{j \in S} P(X_t = j, X_{t+h} = j) = \sum_{j \in S} p_j(t) p_{jj}(h),$$

a protože $|p_j(t) p_{jj}(h)| \leq p_j(t)$ a $\sum_{j \in S} p_j(t) = 1$, dostaneme

$$\lim_{h \to 0_+} P(X_{t+h} = X_t) = \sum_{j \in S} p_j(t) \lim_{h \to 0_+} p_{jj}(h) = 1.$$

Zbytek důkazu je analogický.

□

Protože řetězec $\{X_t\}$ je stochasticky spojitý proces, existuje podle věty 1.2 jeho verze, která je separabilní a měřitelná. V dalším výkladu budeme vždy uvažovat jen tuto separabilní a měřitelnou verzi, pro kterou podržíme značení $\{X_t\}$. Dále budeme uvažovat jen takové Markovovy řetězce se spojitým časem, jejichž trajektorie jsou spojité zprava.

Nyní se budeme zabývat diferencovatelností pravděpodobností přechodu.

Věta 3.3. *Pro každé $i \in S$ existuje limita*

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} := q_i \le \infty, \tag{3.7}$$

pro každé $i, j \in S$, $i \neq j$ existují limity

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} := q_{ij} < \infty, \tag{3.8}$$

a pro každé $i \in S$ platí

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} \le q_i.$$

Důkaz. Důkaz tvrzení (3.7), (3.8) lze nalézt v Chung (1967), věta II.2.4 a věta II.2.5, nebo Karlin a Taylor (1981), kap. 14, věty 1.1, 1.2. Využijeme-li vlastností stochastické matice, máme pro každé $h \ge 0$ a $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1-p_{ii}(h)}{h} = \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} \frac{p_{ij}(h)}{h} \ge \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Odtud dostaneme poslední tvrzení limitním přechodem pro $h \to 0_+$ a $N \to \infty$, když použijeme výsledků (3.7) a (3.8).

□

Dále budeme uvažovat jen takové řetězce, pro které

$$q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij} \text{ pro všechna } i \in S. \tag{3.9}$$

Poznámka. Je-li množina stavů S konečná, vztah (3.9) vždy platí, neboť je

$$0 = 1 - \sum_{j\in S} p_{ij}(h), \quad h \ge 0,$$

odtud limitním přechodem

$$0 = \lim_{h\to 0_+} \frac{1-\sum_j p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{1-p_{ii}(h)-\sum_{j\neq i} p_{ij}(h)}{h} = q_i - \sum_{j\neq i} q_{ij},$$

protože v konečném případě lze zaměnit limitu a sumaci.

Definice. Nezáporná čísla q_{ij} definovaná ve větě 3.3 se nazývají *intenzity* přechodu ze stavu i do stavu j, nezáporné číslo q_i se nazývá *celková intenzita*. Matice $\boldsymbol{Q} = \{q_{ij}, i, j \in S\}$, kde $q_{ii} = -q_i$, se nazývá *matice intenzit* přechodu.

Příklad 3.1. *Poissonův proces.* Připomeňme proces popsaný v příkladu 1.4. Uvažujme události téhož typu, které nastávají náhodně v čase. Předpokládejme, že počty událostí v disjunktních časových intervalech jsou nezávislé náhodné veličiny a závisí jen na délce těchto intervalů; pravděpodobnost, že událost nastane v intervalu $(t, t+h]$ nechť je pro všechna t rovna $\lambda h + o(h)$ pro nějaké $\lambda > 0$, pravděpodobnost, že v $(t, t+h]$ nastane více než jedna událost, nechť je $o(h)$; symbol $o(h)$ zde značí, že $o(h)/h \to 0$ při $h \to 0_+$. Nechť $X_0 = 0$ a pro $t > 0$ nechť X_t značí počet událostí, které nastanou v intervalu $(0, t]$. Potom $\{X_t, t \geq 0\}$ je proces celočíselných náhodných veličin, kterému budeme říkat *Poissonův proces s intenzitou* λ. Z předpokladů, které jsme učinili, plyne, že pro libovolné časové okamžiky $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ jsou počty událostí $X_{t_2} - X_{t_1}$ a $X_{t_4} - X_{t_3}$ v intervalech $(t_1, t_2]$ a $(t_3, t_4]$ nezávislé náhodné veličiny. Říkáme, že proces $\{X_t\}$ je *proces s nezávislými přírůstky*. Odtud též plyne, že má markovskou vlastnost. Platí pro všechna $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
P(X_{t+h} = j | X_t = i) = p_{ij}(h) &= \lambda h + o(h) & j &= i+1, \\
&= 1 - \lambda h + o(h) & j &= i, \\
&= o(h) & j &> i+1, \\
&= 0 & j &< i.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že pravděpodobnosti přechodu závisejí pouze na délce intervalu h; jde o homogenní řetězec se spojitým časem. Intenzity přechodu jsou $q_{i,i+1} = \lambda, q_i = -q_{ii} = \lambda, q_{ij} = 0$ jinak; matice $\boldsymbol{Q}$ tedy je

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.
$$

Později ukážeme, že absolutní pravděpodobnosti se řídí Poissonovým rozdělením.

Příklad 3.2. *Lineární proces množení a zániku.* Uvažujme populaci, jejíž jedinci se mohou množit a zanikat. Pravděpodobnost, že z jedince vznikne během intervalu $(t, t+h]$ nový jedinec, je $\lambda h + o(h)$, více jedinců vznikne s pravděpodobností $o(h)$. Každý jedinec s pravděpodobností $\mu h + o(h)$ během intervalu $(t, t+h]$ zanikne. Osudy jedinců jsou nezávislé. Je-li rozsah populace v čase t roven j, potom lze ukázat, že během intervalu $(t, t+h]$ se o jednotku zvětší s pravděpodobností $j\lambda h + o(h)$, o jednotku zmenší s pravděpodobností $j\mu h + o(h)$, více než k jedné změně dojde s pravděpodobností $o(h)$ a k žádné změně s pravděpodobností $1 - j\lambda h - j\mu h + o(h)$. Je-li X_t rozsah populace v čase t, potom $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec se spočetnou množinou stavů a spojitým časem a s intenzitami

$$\begin{aligned}
q_{j,j+1} &= j\lambda \quad j = 0, 1, \dots, \\
q_{j,j-1} &= j\mu \quad j = 1, \dots, \\
q_{ij} &= 0 \quad \text{pro ostatní } i \neq j, \\
q_j &= j(\lambda + \mu),
\end{aligned}$$

matice $\boldsymbol{Q}$ je tedy

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

K tomuto procesu se ještě později vrátíme.

Nyní ukážeme význam intenzit přechodu.

Věta 3.4. *Pro homogenní Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ se spočetnou množinou stavů platí pro všechna $s \geq 0$ a pro všechna $h > 0$*

$$P(X_t = i, s \leq t \leq s + h | X_s = i) = e^{-\overset{q_{ii}}{\widetilde{q_i}} h} \tag{3.10}$$

(kde $e^{-q_i h} = 0$, je-li $q_i = \infty$).

Důkaz. Protože $\{X_t\}$ je stochasticky spojitý a separabilní, platí (Doob (1953))

$$P(X_t = i, s \leq t \leq s + h) = \lim_{n \to \infty} P(X_{t_{0,n}} = i, X_{t_{1,n}} = i, \dots, X_{t_{n,n}} = i) \tag{3.11}$$

pro každou posloupnost $D_n = \{t_{0,n} < \dots < t_{n,n}\}$ dělení intervalu $[s, s+h]$, jejichž norma konverguje k nule při $n \to \infty$.

Nechť $D_n = \{t_{k,n} : t_{k,n} = s + \frac{hk}{2^n},\ k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$, $n = 1, 2 \ldots$ Z vlastností podmíněných pravděpodobností, z (3.11) a (3.2) máme

$$P(X_t = i, s \le t \le s + h | X_s = i) = \frac{P(X_t = i, s \le t \le s + h)}{P(X_s = i)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_{t_{0,n}} = i, X_{t_{1,n}} = i, \ldots, X_{t_{n,n}} = i)}{P(X_s = i)} = \lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]^{2^n}.$$

Je-li $q_i < \infty$, můžeme vzhledem k (3.7) psát

$$\lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]^{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - q_i\frac{h}{2^n} + o\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]^{2^n} = e^{-q_i h}.$$

Je-li $q_i = \infty$, potom plyne z (3.7), že pro libovolné $A > 0$ je $p_{ii}(\delta) \le 1 - A\delta \le e^{-A\delta}$, je-li δ dostatečně malé; odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]^{2^n} \le e^{-Ah}.$$

Protože A může být libovolně velké, je tato limita rovna nule.

□

Věta 3.5. *Je-li $q_i = 0$, potom $p_{ii}(t) = 1$ pro všechna $t \ge 0$. Je-li $0 < q_i < \infty$, má doba, po kterou řetězec setrvá ve stavu i, exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{q_i}$.*

Důkaz. Zřejmě platí

$$p_{ii}(t) = P(X_t = i|X_0 = i) \ge P(X_s = i, 0 \le s \le t|X_0 = i) = e^{-q_i t}$$

pro každé $t > 0$. Tedy pro $q_i = 0$ je $p_{ii}(t) = 1$ pro všechna $t \ge 0$.

Nechť nyní $0 < q_i < \infty$ a předpokládejme, že řetězec, který v čase 0 byl ve stavu i, vystoupí z i v čase $\tau_i = \inf\{t > 0 : X_t \ne i\}$. Potom pro dobu setrvání $T_i = \tau_i$ platí

$$P(T_i > s) = P(X_t = i, 0 \le t \le s|X_0 = i) = e^{-q_i s},$$

tudíž T_i má exponenciální rozdělení s parametrem q_i a hustotou

$$f(x) = \begin{cases} q_i e^{-q_i x}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{jinde;} \end{cases}$$

střední doba setrvání ve stavu i je tedy $\frac{1}{q_i}$.

Podobně lze ukázat, že řetězec, který vstoupí do stavu i v nějakém čase $t_0 > 0$, setrvá v i po dobu T_i, která má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{q_i}$ (rozdělení doby setrvání ve stavu i nezávisí na okamžiku, ve kterém řetězec vstoupí do i.)

□

Definice. Stav $i \in S$ takový, že $q_i = 0$, se nazývá *absorpční*. Stav $i \in S$ takový, že $q_i > 0$, se nazývá *stabilní*, jestliže $q_i < \infty$, a *nestabilní*, jestliže $q_i = \infty$.

Je-li i absorpční stav, znamená to, že řetězec, který přejde do stavu i, už v tomto stavu setrvá; střední doba setrvání v tomto stavu je nekonečně dlouhá. Střední doba setrvání v nestabilním stavu je nulová (je $q_i = \infty$). V dalších úvahách se budeme zabývat jen řetězci, jejichž všechny stavy jsou stabilní.

Zatím jsme si ukázali, že intenzity výstupu q_i mají význam převrácených středních dob setrvání ve stavech $i \in S$. Ukažme si ještě význam intenzit přechodu q_{ij}.

Věta 3.6. *Nechť $0 < q_i < \infty$. Potom pravděpodobnost, že řetězec z počátečního stavu i přejde nejdříve do stavu j, je rovna $\frac{q_{ij}}{q_i}$ pro všechna $j \neq i$.*

Vzhledem k homogenitě řetězce je q_{ij}/q_i též pravděpodobnost, že řetězec, který se nachází ve stavu i v nějakém čase $t > 0$, přejde v intervalu (t, ∞) nejdříve do stavu j.

Důkaz. Označme

$$A = \{\omega : X_t(\omega) = i, 0 \le t < \tau,\ X_\tau(\omega) = j,\ \tau > 0\},$$

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\omega : X_t(\omega) = i, 0 \le t \le k2^{-n},\ X_{(k+1)2^{-n}}(\omega) = j\}.$$

Zřejmě $A_n \to A$. Potom vzhledem ke spojitosti a separabilitě procesu a podle (3.10)

$$P(A|X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n|X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-kq_i 2^{-n}\} p_{ij}(2^{-n})$$
$$= \lim_{n\to\infty} p_{ij}(2^{-n})[1 - \exp\{-q_i 2^{-n}\}]^{-1} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

□

Definice. Nechť $\{X_t, t \ge 0\}$ je náhodný proces se spočetnou množinou stavů S definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, který má zprava spojité trajektorie. Nechť $\mathcal{F}_t$ je σ-algebra generovaná rodinou náhodných veličin $\{X_s, s \le t\}$, t. j. $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \le t\}$. Náhodná veličina $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ se nazývá *markovský čas* procesu $\{X_t, t \ge 0\}$, jestliže platí $[\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \ge 0$.

S pojmem markovského času jsme se setkali již u Markovových řetězců s diskrétním časem. Je to náhodná veličina, která nezávisí na budoucích hodnotách náhodného procesu. Příkladem markovského času je konstantní čas $\tau = \tau_0 > 0$. Také čas prvního výstupu ze stavu j Markovova řetězce se spojitým časem definovaný jako $\tau_j = \inf\{t \geq 0, X_t \neq j\}$ je markovský čas. V tomto případě vzhledem k separabilitě máme (Q značí spočetnou hustou množinu v $[0, \infty)$)

$$[\tau_j > t] = [X_s = j, 0 \leq s \leq t] = \bigcap_{s \in Q \cap [0,t]} [X_s = j] \in \mathcal{F}_t,$$

tedy i $[\tau_j \leq t] \in \mathcal{F}_t$.

Nechť

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right) = \sigma\{X_t, t \geq 0\}.$$

Zřejmě $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{A}$.

Věta 3.7. *Nechť τ je markovský čas procesu $\{X_t, t \geq 0\}$. Potom X_τ je $\mathcal{F}_\tau$−měřitelná náhodná veličina, kde*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}.$$

Důkaz. Stačí ukázat, že pro každé $i \in S$ a každé $t \geq 0$ je

$$[X_\tau = i] \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t.$$

Zřejmě platí $[X_\tau = i] \cap [\tau \leq t] = ([X_t = i] \cap [\tau = t]) \cup ([X_\tau = i] \cap [\tau < t])$. Protože $\{X_t\}$ nabývá jen nezáporných celočíselných hodnot a má zprava spojité trajektorie, je tedy

$$\begin{aligned}[X_\tau = i] \cap [\tau \leq t] &= [X_t = i] \cap [\tau = t] \\ &\cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{z[2^m t]} [X_{k2^{-m}} = i] \cap [(k-1)2^{-m} \leq \tau < k2^{-m}]\right) \in \mathcal{F}_t,\end{aligned}$$

kde $z[x]$ značí celou část čísla x.

$\square$

Předpokládejme, že na počátku je řetězec v nějakém stavu i; je-li $q_i > 0$, setrvá v něm po náhodnou dobu T_i a potom přejde do stavu j s pravděpodobností $\frac{q_{ij}}{q_i}$. Je-li $q_j > 0$, setrvá řetězec ve stavu j po náhodnou dobu T_j; je-li $q_j = 0$, řetězec navždy setrvá v tomto stavu ($T_j = \infty$) atd. Nechť $J_0 = 0$ a $J_1, J_2, \dots$ jsou po sobě následující časové okamžiky, ve kterých dochází k přechodům mezi stavy řetězce, t. j.

$$\begin{aligned} J_1 &= \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\}, \\ J_2 &= \inf\{t > J_1 : X_t \neq X_{J_1}\}, \\ &\dots \\ J_{n+1} &= \inf\{t > J_n : X_t \neq X_{J_n}\}, \; n \geq 0 \end{aligned}$$

Doby mezi jednotlivými přechody jsou $S_1 = J_1, S_2 = J_2 - J_1$ (je-li $J_1 < \infty$, jinak $S_2 = \infty$) atd.; zřejmě je

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad n \geq 1.$$

Označme ještě

$$\xi = \sup J_n = \sum_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Definice. Homogenní řetězec se stabilními stavy se nazývá *regulární*, jestliže

$$P_i(\xi = \infty) = 1 \;\forall\; i \in S\,.$$

Náhodná veličina ξ se nazývá *čas exploze.*

Je-li proces regulární, znamená to, že na každém konečném intervalu $(0, t)$ dojde s pravděpodobností jedna jen ke konečně mnoha přechodům mezi stavy řetězce; jestliže na konečném intervalu dojde k nekonečně mnoha přechodům, proces exploduje. Poznamenejme, že se budeme zabývat chováním procesu jen do času exploze; jestliže $\xi < \infty$, definujeme $X_t = \infty$ pro $t \geq \xi$.

Definujme nyní matici $Q^* = \{q^*_{ij}, i, j \in S\}$ předpisem

(3.12)
$$q^*_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & q_i > 0 \\ 0 & q_i = 0 \end{cases}, \; i \neq j$$
$$q^*_{ii} = \begin{cases} 0 & q_i > 0 \\ 1 & q_i = 0 \end{cases}$$

Uvažujme opět posloupnost časových okamžiků $J_1, J_2, \dots,$ v nichž dochází k přechodům mezi stavy řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$, a definujme posloupnost

(3.13)
$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0, \\ Y_n &= X_{J_n}, \quad n = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

(je-li $J_n = \infty$, definujeme $Y_\infty = Y_{J_{n-1}}$.)

Vzhledem k tomu, že J_n jsou markovské časy, jsou Y_n náhodné veličiny, jak plyne z věty 3.7. Dále lze ukázat, že $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem s množinou stavů $\{S = 0, 1, \dots\}$ a pravděpodobnostmi přechodu q^*_{ij} definovanými výše (Gichman a Skorochod, (1973, II.díl)). Řetězec $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá *vnořený diskrétní řetězec* procesu $\{X_t, t \geq 0\}$. Mezi oběma řetězci platí např. vztahy

$$P(X_t = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_n = i, J_n \leq t < J_{n+1})$$

a

$$P(X_t = i \text{ pro nějaké } t \geq 0) = P(Y_n = i \text{ pro nějaké } n \geq 0).$$

Příklad 3.3. *Explozivní proces růstu.* Uvažujme řetězec se spojitým časem a množinou stavů $S = \{1, 2, \dots, \}$, který je dán intenzitami přechodu

$$q_i = -q_{ii} = 2^i, \quad q_{i,i+1} = 2^i, \quad q_{ij} = 0 \text{ jinak.}$$

Předpokládejme, že na počátku je řetězec ve stavu 1. V tomto stavu setrvá náhodnou dobu T_1, která má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2}$, potom s pravděpodobností 1 přejde do stavu 2, ve kterém setrvá náhodnou dobu T_2, která má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{4}$ atd., je tedy čas exploze $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} T_k$ a

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} ET_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

takže

$$P_1(\xi < \infty) = 1;$$

kdyby byla tato veličina s kladnou pravděpodobností nekonečná, byla by nekonečná i její střední hodnota. Řetězec není regulární; v konečném čase se může s pravděpodobností 1 uskutečnit nekonečně mnoho přechodů.

Vnořený Markovův řetězec s diskrétním časem probíhá množinu stavů $S = \{1, 2, \dots\}$ a má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Bez důkazu ještě uveďme nutnou a postačující podmínku, za které je řetězec regulární.

Věta 3.8. *Homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, stabilními stavy $i \in S = \{0, 1, \dots\}$ a vnořeným řetězcem $\{Y_n\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je regulární tehdy a jen tehdy, když*

$$P_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_{Y_k}} = \infty\right) = 1 \quad \forall\, i \in S, \tag{3.14}$$

kde q_j značí intenzitu výstupu ze stavu j, $j \in S$.

Důkaz. Gichman a Skorochod (1973, II. díl), věta 3 v kap. III, odst. 2.

□

Poznámka. Podmínka regularity (3.14) je například splněna, je-li $q_i \le C \quad \forall\, i \in S$, neboť v tom případě je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_{Y_k}} \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{C} = \infty$$

s pravděpodobností 1. Je zřejmé, že je-li množina stavů S konečná, je proces $\{X_t, t \ge 0\}$ regulární.

Dále platí, že proces, jehož vnořený řetězec je nerozložitelný a jehož stavy jsou trvalé, je regulární. Uvažujme nějaký stav i; protože je trvalý, projde jím řetězec nekonečně mnohokrát v časech $n_1, n_2 \dots$, tudíž

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_{Y_k}} \ge \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q_{Y_{n_j}}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} = \infty.$$

3.2. Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení

Uvažujme Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $S = \{0, 1, \dots\}$. V předchozí kapitole jsme definovali intenzity přechodu pomocí derivací pravděpodobností přechodu v bodě 0. Následující věta udává souvislost intenzit přechodu s derivacemi pravděpodobností přechodu v obecném bodě.

Věta 3.9 (Kolmogorovovy diferenciální rovnice). *Předpokládejme, že $q_i < \infty$ pro všechna $i \in S$ a platí (3.9). Potom pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ jsou diferencovatelné pro všechna $i, j \in S$ a $t > 0$ a platí*

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \ne i} q_{ik} p_{kj}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) \tag{3.15}$$

(retrospektivní rovnice).

Je-li konvergence $\frac{p_{ij}(h)}{h} \to q_{ij}$ stejnoměrná v i, potom pro každé $i, j \in S$ a $t > 0$

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t)q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)q_{kj} \tag{3.16}$$

(prospektivní rovnice).

Maticově lze soustavu retrospektivních rovnic zapsat jako

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)$$

a soustavu prospektivních rovnic jako

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}.$$

Důkaz. Vyjdeme z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s)p_{kj}(t) = \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(s)p_{kj}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \quad N > i,$$

odkud dostaneme

$$\frac{p_{ij}(s+t) - p_{ij}(t)}{s} = \frac{[p_{ii}(s) - 1]p_{ij}(t)}{s} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} \frac{p_{ik}(s)p_{kj}(t)}{s} + h_N(s,t),$$

kde jsme označili

$$h_N(s,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{p_{ik}(s)p_{kj}(t)}{s}.$$

Pro všechna $s > 0, t \geq 0$ máme

$$0 \leq h_N(s,t) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{p_{ik}(s)}{s} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(s)}{s} = \frac{1 - p_{ii}(s)}{s} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} \frac{p_{ik}(s)}{s}$$

takže

$$\begin{aligned}
\frac{[p_{ii}(s) - 1]p_{ij}(t)}{s} &+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} \frac{p_{ik}(s)p_{kj}(t)}{s} \\
&\leq \frac{p_{ij}(s+t) - p_{ij}(t)}{s} \\
&\leq \frac{[p_{ii}(s) - 1]p_{ij}(t)}{s} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} \frac{p_{ik}(s)p_{kj}(t)}{s} + \frac{1 - p_{ii}(s)}{s} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} \frac{p_{ik}(s)}{s}.
\end{aligned}$$

Odtud limitním přechodem pro $s \to 0_+$ dostaneme

$$\begin{aligned}
-q_i p_{ij}(t) &+ \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} q_{ik} p_{kj}(t) \\
&\leq p'_{ij}(t_+) \\
&\leq -q_i p_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} q_{ik} p_{kj}(t) + q_i - \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} q_{ik},
\end{aligned}$$

kde $p'_{ij}(t_+)$ značí derivaci p_{ij} v bodě t zprava, a limitním přechodem pro $N \to \infty$ zjistíme, že $p'_{ij}(t_+)$ vyhovuje (3.15). Stejným způsobem lze ukázat, že (3.15) platí také pro derivaci zleva.

Podobně odvodíme prospektivní soustavu: Opět vyjdeme z Chapmanovy a Kolmogorovovy rovnosti a dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{p_{ij}(s+t) - p_{ij}(s)}{t} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t) - p_{ij}(s)}{t} \\
&= \frac{p_{ij}(s)(p_{jj}(t) - 1)}{t} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{p_{ik}(s) p_{kj}(t)}{t}
\end{aligned}$$

a odtud limitním přechodem pro $t \to 0_+$ (vzhledem k předpokladu o stejnoměrné konvergenci)

$$p'_{ij}(s_+) = -p_{ij}(s) q_j + \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\infty} p_{ik}(s) q_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) q_{kj}.$$

Podobně postupujeme pro derivaci zleva.

□

Poznámka. Jde-li o řetězec s konečně mnoha stavy, není předpoklad o stejnoměrné konvergenci $p_{ij}(h)/h$ ve větě 3.9 nutný.

Poznámka. Vysvětleme ještě pojem retrospektivní a prospektivní rovnice: v retrospektivní rovnici jsou derivace $p'_{ij}(t)$ vyjádřeny pomocí všech možných pravděpodobností přechodu do stavu j, zatímco v prospektivní rovnici pomocí všech možných pravděpodobností přechodu ze stavu i.

Pravděpodobnosti přechodu Markovova řetězce se spojitým časem vyhovují tedy soustavám retrospektivních či prospektivních Kolmogorovových rovnic. Naopak nyní předpokládejme, že je dána soustava diferenciálních rovnic typu (3.15) nebo (3.16); zajímá nás, zda taková soustava má řešení, které reprezentuje pravděpodobnosti přechodu nějakého Markovova řetězce. Omezíme se na konečný případ.

Věta 3.10. *Nechť $\boldsymbol{Q} = \{q_{ij}, 0 \le i, j \le N\}$ je matice, pro jejíž prvky platí*

$$q_{ij} \ge 0,\ i \ne j \quad q_{ii} = -\sum_{i \ne j} q_{ij}.$$

Potom existuje jediné řešení soustav (3.15) a (3.16), stejné pro obě soustavy, které vyhovuje počáteční podmínce $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$, a které představuje soustavu pravděpodobností přechodu Markovova řetězce se spojitým časem a konečnou množinou stavů. Maticově lze toto řešení psát ve tvaru $\boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{Q}t}$, kde $e^{\boldsymbol{Q}t}$ je maticová exponenciální funkce definovaná předpisem

$$e^{\boldsymbol{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{Q}^k t^k}{k!}.$$

Důkaz. Soustavy (3.15) a (3.16) jsou soustavy lineárních homogenních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty; zapsáno v maticovém tvaru, (3.15) má obecné řešení $\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0)e^{\boldsymbol{Q}t}$ a (3.16) má obecné řešení $\boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{Q}t}\boldsymbol{P}(0.)$ Při počáteční podmínce $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$ mají tedy obě soustavy řešení

$$\boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{Q}t}. \tag{3.17}$$

Toto řešení splňuje Chapmanovu-Kolmogorovovu rovnost (3.4), neboť z vlastností maticové exponenciely plyne $e^{\boldsymbol{Q}(t+s)} = e^{\boldsymbol{Q}t}e^{\boldsymbol{Q}s}$ pro každé $t, s \ge 0$. Dále musíme ukázat, že $\boldsymbol{P}(t)$ je stochastická matice pro každé $t \ge 0$. Sečtením (3.16) pro všechna j dostaneme (jde o konečné součty)

$$\sum_j p'_{ij}(t) = \sum_j \sum_k p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_k p_{ik}(t) \sum_j q_{kj} = 0,$$

neboť $\sum_j q_{kj} = 0$. Tedy $\sum_j p_{ij}(t)$ je konstantní pro každé $t \ge 0$, a protože $\sum_j p_{ij}(0) = 1$, je tato konstanta rovna jedné.

Nezápornost $p_{ij}(t)$ lze dokázat takto: především je $p_{ii}(0) = 1$ a vzhledem ke spojitosti je $p_{ii}(t) > 0$ v nějakém pravém okolí nuly.

Pokud $q_{ij} > 0$ pro všechna $i \ne j$, máme $p'_{ij}(0) = q_{ij} > 0$, tedy $p_{ij}(t) > 0$ pro $0 < t < \delta$, takže je $\boldsymbol{P}(t) > \boldsymbol{0}$ pro $0 < t \le h$ a nějaké $h > 0$; $\boldsymbol{0}$ je nulová matice. Nyní z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti máme $\boldsymbol{P}(t+h) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(h) > \boldsymbol{0}$ pro $0 < t \le h$, tedy $\boldsymbol{P}(t) > \boldsymbol{0}, 0 < t \le 2h$ atd., takže $\boldsymbol{P}(t) > \boldsymbol{0}, \forall\, t > 0$.

Pokud je nějaké $q_{ij} = 0$, uvažujme na příslušném místě hodnotu $\frac{1}{n}$ a upravme hodnotu diagonálního prvku q_{ii} tak, aby součet v i–tém řádku zůstal nulový. Takto vzniklá matice $\boldsymbol{Q}_n$ má všechny nediagonální prvky kladné a podle toho, co jsme již dokázali, totéž musí platit pro prvky matice $\boldsymbol{P}_n(t) = e^{\boldsymbol{Q}_n t}$ pro každé $t > 0$. Zřejmě $\boldsymbol{Q}_n \to \boldsymbol{Q}$ pro $n \to \infty$. Potom také $\boldsymbol{P}_n(t) \to \boldsymbol{P}(t)$ a tedy $p_{ij}(t) \geq 0$ pro všechna $i, j \in S$ a všechna $t \geq 0$.

□

Příklad 3.4. *Model práce stroje.* Doba bezporuchového provozu jistého stroje je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\alpha}$ pro $\alpha > 0$. Když dojde k poruše, stroj začne být okamžitě opravován; doba opravy je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$. Jakmile je oprava dokončena, je stroj znovu uveden do provozu.

Definujme náhodnou veličinu X_t, která nabývá hodnoty 0, jestliže v čase t stroj pracuje a hodnoty 1, je-li v čase t stroj opravován. Potom $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $S = \{0, 1\}$. Matice intenzit přechodu je

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Ukažme si nyní několik způsobů, jak určit z daných intenzit pravděpodobnosti přechodu.

Pro pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ můžeme psát retrospektivní rovnice

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\alpha p_{00}(t) + \alpha p_{10}(t) \\ p'_{10}(t) &= \ \ \beta p_{00}(t) - \beta p_{10}(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Vynásobíme-li první rovnici číslem β a druhou rovnici číslem α a obě rovnice sečteme, dostaneme

$$\beta p'_{00}(t) + \alpha p'_{10}(t) = 0,$$

odkud integrací

$$\beta p_{00}(t) + \alpha p_{10}(t) = c$$

pro nějakou konstantu c. Z podmínky $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ zjistíme, že $c = \beta$ a tudíž

$$\beta p_{00}(t) + \alpha p_{10}(t) = \beta. \tag{3.19}$$

Vypočteme-li z (3.19) $p_{10}(t)$ a dosadíme do první rovnice v (3.18), máme

$$p'_{00}(t) = \beta - (\alpha + \beta) p_{00}(t),$$

což je diferenciální rovnice pro $p_{00}(t)$, která má obecné řešení

$$p_{00}(t) = ce^{-(\alpha+\beta)t} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Pro $t = 0$ dostaneme

$$p_{00}(0) = 1 = c + \frac{\beta}{\alpha+\beta},$$

takže

$$p_{00}(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Zbylé pravděpodobnosti vypočteme z (3.19) a pomocí doplňků.

Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ můžeme určit také přímo podle vzorce (3.17). Snadno zjistíme, že matice $\boldsymbol{Q}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(\alpha+\beta)$ a platí

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1},$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Nyní podle (3.17)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{Q}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{Q}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 0^k & 0 \\ 0 & (-(\alpha+\beta))^k \end{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} \\ &= \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha-\alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta-\beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha+\beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

K výsledku (3.20) dospějeme také použitím Perronova vzorce pro výpočet matice $e^{\boldsymbol{Q}t}$ (viz Dodatek B, věta B.6). Snadno zjistíme, že $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) = \lambda(\lambda+\alpha+\beta)$ a adjungovaná matice $\operatorname{adj}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})$ je tvaru

$$\operatorname{adj}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) = \begin{pmatrix} \lambda+\beta & \alpha \\ \beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}.$$

Dále máme

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})}{\lambda - \lambda_1} = \lambda + \alpha + \beta,$$

$$\psi_2(\lambda) = \frac{\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})}{\lambda - \lambda_2} = \lambda.$$

Dosazením do Perronova vzorce máme

$$\boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{Q}t} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\psi_1(\lambda_1)} \operatorname{adj}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\psi_2(\lambda_2)} \operatorname{adj}(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}),$$

což je opět (3.20).

Určeme nyní ještě absolutní pravděpodobnosti v čase t. Předpokládejme, že počáteční rozdělení je $p_0 = P(X_0 = 0) = 1$, $p_1 = P(X_0 = 1) = 0$. Potom podle (3.3)

$$p_0(t) = p_0 p_{00}(t) + p_1 p_{10}(t) = p_{00}(t)$$

$$p_1(t) = p_0 p_{01}(t) + p_1 p_{11}(t) = p_{01}(t).$$

V případě řetězců se spočetně mnoha stavy je řešení Kolmogorovových diferenciálních rovnic obecně mnohem složitější, pro procesy, které nejsou regulární, nemusí jednoznačné řešení vůbec existovat. Většinou se omezujeme na výpočet absolutních pravděpodobností $p_j(t), j \in S$ při pevně daném počátečním stavu i, t. j. pro dané počáteční rozdělení $p_i = 1, p_j = 0, j \neq i$. Za stejných podmínek, za jakých jsme odvodili soustavu prospektivních Kolmogorovových diferenciálních rovnic, můžeme odvodit soustavu diferenciálních rovnic pro absolutní pravděpodobnosti: z (3.3) a (3.16) dostaneme

$$p_j'(t) = -p_j(t) q_j + \sum_{k \neq j} p_k(t) q_{kj}, \quad j \in S$$

s počáteční podmínkou

$$p_i(0) = 1, \; p_j(0) = 0, \quad j \neq i.$$

Při této počáteční podmínce odpovídají absolutní pravděpodobnosti i-tému řádku matice $\boldsymbol{P}(t)$. Některými speciálními případy takových rovnic a metodami řešení se budeme zabývat později.

3.3. Stacionární a limitní rozdělení

Podobně jako pro řetězce s diskrétním časem definujeme stacionární rozdělení pro řetězce se spojitým časem.

Definice. Nechť $\{X(t), t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem, množinou stavů S a maticemi pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(t), t \geq 0$. Vektor $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i \geq 0, i \in S\}$ takový, že

$$\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\eta}^T, \quad t \in T \tag{3.21}$$

se nazývá *invariantní míra* procesu $\{X_t, t \geq 0\}$ na S vzhledem k $\{\boldsymbol{P}(t), t \geq 0\}$. Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi}$ na S, které splňuje (3.21), nazývá se *stacionární rozdělení* daného řetězce.

Věta 3.11. *Je-li počáteční rozdělení homogenního Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ stacionární, je $\{X_t, t \geq 0\}$ striktně stacionární proces, t. j. pro libovolné $k \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 \cdots < t_k$, pro každé $s > 0$ a libovolná $i_1, \ldots, i_k \in S$ platí*

$$P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_k} = i_k) = P(X_{t_1+s} = i_1, \ldots, X_{t_k+s} = i_k).$$

Speciálně pro absolutní pravděpodobnosti platí

$$p_j(t) = P(X_t = j) = \pi_j, \; j \in S, \; t \geq 0.$$

Důkaz. Věta se dokáže zcela analogicky jako věta 2.24 s použitím vlastností (3.2), (3.3) a definice stacionárního rozdělení.

□

Definice. Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{a} = \{a_i, i \in S\}$ na S se nazývá *limitní rozdělení*, jestliže pro všechna $i, j \in S$

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = a_j.$$

Věta 3.12. *Pokud existuje limitní rozdělení Markovova řetězce, je to stacionární rozdělení.*

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{a} = \{a_i, i \in S\}$ je limitní rozdělení. Z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti máme pro $t \geq 0, h \geq 0$ a přirozené N

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h) \geq \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t) p_{kj}(h),$$

odtud limitním přechodem pro $t \to \infty$

$$a_j \geq \sum_{k=0}^{N} a_k p_{kj}(h)$$

a limitním přechodem pro $N \to \infty$

$$a_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_{kj}(h).$$

Pokud pro nějaké $j \in S$ platí poslední nerovnost s ostrým znaménkem, musí platit, jak zjistíme sečtením těchto nerovností, že

$$\sum_{j \in S} a_j > \sum_{k \in S} a_k,$$

což je spor, tedy

$$a_j = \sum_{k \in S} a_k p_{kj}(h), h \geq 0, \ j \in S$$

je stacionární rozdělení.

□

Řešení rovnice (3.21) pro každé $t \geq 0$ může být obtížné. Ukážeme si proto, jak lze stacionární rozdělení určit pomocí matice intenzit $\boldsymbol{Q}$. Nejdříve však popíšeme strukturu množiny stavů řetězce se spojitým časem.

Definice. Řekneme, že stav j Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ je dosažitelný ze stavu i, jestliže

$$P_i(X_t = j) = p_{ij}(t) > 0 \quad \text{pro nějaké } t > 0, \quad i, j \in S.$$

Pomocí pojmu dosažitelnost můžeme definovat rozklad množiny stavů zcela analogicky jako pro řetězce s diskrétním časem.

Věta 3.13. *Následující vztahy mezi stavy řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ a vnořeného řetězce $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ jsou ekvivalentní:*

(1) *j je dosažitelný z i v $\{X_t, t \geq 0\}$*

(2) *j je dosažitelný z i v $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$*

(3) *$q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} i_n} > 0$ pro stavy $i_0 = i, i_n = j$ a nějaké stavy $i_1, \dots, i_{n-1}$*

(4) *$p_{ij}(t) > 0 \quad \forall\, t > 0$*

(5) *$p_{ij}(t) > 0 \quad$ pro nějaké $t > 0$.*

Důkaz. Zřejmě (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1). Je-li $p_{ij}(t) > 0$ pro nějaké $t > 0$, je $q_{ij}^{*(n)} > 0$ pro nějaké $n > 0$, kde $q_{ij}^{*(n)}$ je pravděpodobnost přechodu po n krocích v řetězci $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, tedy (1) $\Rightarrow$ (2). Je-li $q_{ij}^{*(n)} > 0$ pro nějaké $n > 0$, existuje cesta z i do j v $\{Y_n\}$ taková, že $q_{ii_1}^* q_{i_1 i_2}^* \dots q_{i_{n-1} j}^* > 0$, takže i $q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} j} > 0$, tudíž (2) $\Rightarrow$ (3). Je-li $q_{ij} = p'_{ij}(0_+) > 0$, je $p_{ij}(t) > 0$ pro $0 < t \leq h < \delta$ pro nějaké $\delta > 0$, tedy $p_{ij}(t) \geq p_{ij}(h) p_{jj}(t-h) > 0$ pro všechna $t > 0$, neboť

$$p_{jj}(t) = P_j(X_t = j) \geq e^{-q_j t} > 0 \text{ pro všechna } t \geq 0.$$

Platí-li tedy (3), můžeme psát

$$p_{ij}(t) \geq p_{ii_1}\left(\frac{t}{n}\right) p_{i_1 i_2}\left(\frac{t}{n}\right) \dots p_{i_{n-1} j}\left(\frac{t}{n}\right) > 0 \quad \forall\, t > 0,$$

tedy (3) $\Rightarrow$ (4).

□

Z věty 3.13 plyne, že řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ je nerozložitelný právě když příslušný vnořený řetězec $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je nerozložitelný.

Definice. Stav j řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ se nazývá *trvalý*, jestliže buď $q_j = 0$ (j je absorpční), nebo $q_j > 0$ a současně $P_j(\mathcal{T}_j(1) < \infty) = 1$, kde

$$\mathcal{T}_j(1) = \inf\{t \geq J_1 : X_t = j\}$$

je čas prvního návratu do stavu j.

Stav j se nazývá *přechodný*, jestliže $q_j > 0$ a $P_j(\mathcal{T}_j(1) = \infty) > 0$.

Trvalý stav j se nazývá *nenulový*, jestliže buď $q_j = 0$, nebo $E_j \mathcal{T}_j(1) < \infty$.

Lze ukázat, že stav, který je trvalý ve vnořeném řetězci $\{Y_n\}$, je trvalý také v $\{X_t\}$ a naopak; avšak stav, který je nenulový ve vnořeném řetězci $\{Y_n\}$, nemusí mít stejnou vlastnost v $\{X_t\}$.

Věta 3.14. *Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem, s maticí intenzit Q a vnořeným řetězcem $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, který je nerozložitelný a jehož všechny stavy jsou trvalé. Potom existuje invariantní míra $\boldsymbol{\eta}$ procesu $\{X_t, t \geq 0\}$, která je určena jednoznačně (až na multiplikativní konstantu) jako řešení soustavy*

$$\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T \tag{3.22}$$

a $0 < \eta_j < \infty$ pro všechna $j \in S$. Jestliže $\sum_{j \in S} \eta_j < \infty$, potom $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$, kde

$$\pi_j = \frac{\eta_j}{\sum_{k \in S} \eta_k},$$

je stacionární rozdělení procesu $\{X_t, t \geq 0\}$.

Důkaz. Ukážeme jen hlavní kroky důkazu. Nechť $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_j \geq 0, j \in S\}$ je řešení rovnice $\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T$. Zapíšeme-li tuto vektorovou rovnici po složkách, dostaneme

$$\sum_{i \in S} \eta_i q_{ij} = \sum_{i \neq j} \eta_i q_{ij} + \eta_j q_{jj} = 0, \quad j \in S,$$

neboli

$$\sum_{i \neq j} \eta_i q_{ij} = \eta_j q_j, \quad j \in S. \qquad -q_{ii} = q_i$$

Využijeme-li vztahu (3.12) mezi intenzitami a pravděpodobnostmi přechodu vnořeného řetězce, můžeme poslední rovnici zapsat ve tvaru

$$\sum_{i \in S} \eta_i q_i q^*_{ij} = \eta_j q_j, \quad j \in S,$$

tedy $\{\eta_j q_j, j \in S\}$ je invariantní míra vnořeného řetězce s diskrétním časem a maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{Q}^* = \{q^*_{ij}, i, j \in S\}$. Tento řetězec je podle předpokladu nerozložitelný s trvalými stavy; podle cvičení 2.21 musí být (až na multiplikativní konstantu)

$$0 < \eta_j q_j = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i(1)-1} I(Y_n = j) < \infty$$

pro pevné $i \in S$, kde $\tau_i(1)$ je čas prvního návratu do i v řetězci $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Dále ukážeme, že $\eta_j = \mu^i_j$, kde

$$\mu^i_j = E_i \int_0^{T_i(1)} I(X_t = j)\, dt$$

je střední doba setrvání ve stavu j mezi dvěma návraty řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ do stavu i. Je totiž

$$\mu_j^i = \int_0^\infty P_i(X_t = j, \mathcal{T}_i(1) > t)dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty P_i(Y_n = j, J_n \leq t < J_{n+1}, \mathcal{T}_i(1) > t)dt.$$

Využijeme-li podmiňování, markovské vlastnosti a toho, že $\mathcal{T}_i(1), \tau_i(1)$ jsou markovské časy, pro které

$$[\mathcal{T}_i(1) > J_n] \Longleftrightarrow [\tau_i(1) > n],$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
\mu_j^i &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty P_i(J_n \leq t < J_{n+1} | Y_n = j) P_i(Y_n = j, \tau_i(1) > n)dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty E_i(S_{n+1} | Y_n = j) P_i(Y_n = j, \tau_i(1) > n) \\
&= \frac{1}{q_j} E_i \sum_{n=0}^{\tau_i(1)-1} I(X_n = j) = \eta_j.
\end{aligned}$$

Nyní je třeba ukázat, že $\boldsymbol{\eta}$ je invariantní míra procesu $\{X_t, t \geq 0\}$. Protože

$$E_i \int_0^s I(X_t = j)dt = E_i \int_{\mathcal{T}_i(1)}^{s+\mathcal{T}_i(1)} (X_t = j)dt,$$

je

$$\begin{aligned}
\eta_j = \mu_j^i &= E_i \int_0^s I(X_t = j)dt + E_i \int_s^{\mathcal{T}_i(1)} I(X_t = j)dt = E_i \int_s^{\mathcal{T}_i(1)+s} I(X_t = j)dt \\
&= \int_0^\infty P_i(X_{t+s} = j, \mathcal{T}_i(1) > t)dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty P_i(X_{t+s} = j | X_t = k, \mathcal{T}_i(1) > t) P_i(X_t = k, \mathcal{T}_i(1) > t)dt,
\end{aligned}$$

odkud opět s použitím markovské vlastnosti

$$\begin{aligned}
\eta_j &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty P_i(X_{t+s} = j | X_t = k) P_i(X_t = k, \mathcal{T}_i(1) > t)dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty p_{kj}(s) E_i \int_0^{\mathcal{T}_i(1)} I(X_t = k)dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty p_{kj}(s) \mu_k^i = \sum_{k=0}^\infty p_{kj}(s) \eta_k,
\end{aligned}$$

tedy $\boldsymbol{\eta}$ je invariantní míra. Jestliže $\sum_{j \in S} \eta_j < \infty$, potom existuje stacionární rozdělení v řetězci $\{X_t, t \geq 0\}$ (stačí položit $\pi_j = \eta_j / \sum_{k \in S} \eta_k$ pro $j \in S$).

□

Poznámka. Je-li S konečná a vnořený řetězec nerozložitelný, je suma $\sum_{k \in S} \eta_k$ vždy konečná, stacionární rozdělení π v řetězci $\{X_t, t \geq 0\}$ existuje a lze ho určit jako řešení rovnice $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T$, které splňuje podmínky $\pi_j > 0$ pro všechna $j \in S$ a $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$.

Věta 3.15. *Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem, s maticí intenzit $\boldsymbol{Q}$ a vnořeným řetězcem $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, který je nerozložitelný a jehož všechny stavy jsou trvalé. Nechť $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$, kde $\pi_j > 0$ pro všechna $j \in S$, $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$, je řešení rovnice*

$$\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T.$$

Potom pro pravděpodobnosti přechodu a absolutní pravděpodobnosti v řetězci $\{X_t, t \geq 0\}$ platí

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j \text{ pro všechna } i, j \in S, \tag{3.23}$$

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = \pi_j \text{ pro všechna } j \in S. \tag{3.24}$$

Důkaz. Podle věty 3.14 je $\boldsymbol{\pi}$ stacionární rozdělení řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$, tedy platí $\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{P}(t)$ pro všechna $t \geq 0$. Protože vnořený řetězec je nerozložitelný, je podle věty 3.13 $p_{ij}(t) > 0$ pro všechna $t > 0$ a všechna $i, j \in S$.

Uvažujme nyní diskrétní časové okamžiky $h, 2h, 3h, \ldots$ pro nějaké $h > 0$ a posloupnost náhodných veličin $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ definovaných předpisem $Z_n = X_{nh}$. Zřejmě je

$$P(Z_n = j | Z_{n-1} = i, \ldots, Z_0 = i_0) = P(X_{nh} = j | X_{(n-1)h} = i, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij}(h),$$

je tedy $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovův řetězec s diskrétním časem a maticí pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(h)$ a $\boldsymbol{\pi}$ je stacionární rozdělení v řetězci $\{Z_n\}$. Podle věty 2.25 tedy pro prvky matice $\boldsymbol{P}^n(h)$ platí

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}(h) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(nh) = \pi_j \text{ pro všechna } i, j \in S,$$

tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N \ \ |p_{ij}(nh) - \pi_j| < \varepsilon.$$

Dále máme

$$|p_{ij}(t) - \pi_j| \leq |p_{ij}(t) - p_{ij}(nh)| + |p_{ij}(nh) - \pi_j|$$

a vzhledem ke stejnoměrné spojitosti $p_{ij}(t)$ (věta 3.1) bude i $|p_{ij}(t) - p_{ij}(nh)| < \varepsilon$ pro všechna $nh \leq t \leq (n+1)h$ a dostatečně malé h. Odtud již plyne tvrzení (3.23). Tvrzení (3.24) plyne ihned, použijeme-li limitní přechod pro $t \to \infty$ ve vztahu

$$p_j(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t), \quad j \in S.$$

□

Příklad 3.5 (pokračování příkladu 3.4). Uvažujme opět model, ve kterém práce stroje je popsána Markovovým řetězcem se spojitým časem a stavy 0, 1. K matici intenzit přechodu

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

jsme určili systém matic pravděpodobností přechodu

$$P(t) = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

Složky vektoru

$$\pi = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^T$$

tvoří stacionární rozdělení daného Markovova řetězce.

Ke stejnému výsledku dospějeme řešením soustavy (3.22), která v našem případě zní

$$-\pi_0\alpha + \pi_1\beta = 0$$
$$\pi_0\alpha - \pi_1\beta = 0 \,.$$

Řešení soustavy, které vyhovuje podmínce $\pi_0 + \pi_1 = 1$, je opět

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \,.$$

Příklad 3.6. *Provoz telefonní ústředny.* Uvažujme telefonní ústřednu s N linkami. Předpokládejme, že v časovém intervalu $(t, t+h]$ přijde na ústřednu hovor s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$, která je stejná pro všechna $t \geq 0$. Hovory přicházejí nezávisle; pravděpodobnost, že do ústředny přijdou dva nebo více hovorů v $(t, t+h]$ je $o(h)$, pravděpodobnost, že nepřijde žádný hovor, je $1 - \lambda h + o(h)$. Pokud je všech N linek obsazeno, další hovor se ztrácí.

Dále předpokládejme, že doba trvání hovoru je náhodná veličina T s exponenciálním rozdělením s parametrem $\mu > 0$ (t. j. střední hodnotou $\frac{1}{\mu}$). Potom pravděpodobnost, že hovor, který trvá v čase t, skončí během intervalu $(t, t+h]$ je

$$P(t < T \leq t+h | T > t) = \frac{P(t < T \leq t+h)}{P(T > t)} = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h).$$

Pravděpodobnost, že hovor, který trvá v čase t, neskončí v intervalu $(t, t+h]$, je $1 - \mu h + o(h)$.

Nechť X_t je počet obsazených linek v čase t; potom $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $S = \{0, 1, \dots, N\}$. Pro pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t, t+h) = p_{ij}(h)$ dostaneme

$$p_{j,j+1}(h) = [\lambda h + o(h)][1 - \mu h + o(h)] + o(h) = \lambda h + o(h),$$

podobně odvodíme

$$p_{j,j-1}(h) = \binom{j}{1}[\mu h + o(h)][1 - \mu(h) + o(h)]^{j-1}[1 - \lambda h + o(h)] + o(h) = j\mu h + o(h)$$

a také

$$\begin{aligned}
p_{j,j+k}(h) &= o(h), \quad 2 \leq k \leq N - j, \\
p_{j,j-k}(h) &= o(h), \quad 2 \leq k \leq j, \\
p_{jj}(h) &= 1 - (\lambda + j\mu)h + o(h), \quad 1 \leq j \leq N - 1, \\
p_{00}(h) &= 1 - \lambda h + o(h), \\
p_{NN}(h) &= 1 - N\mu h + o(h).
\end{aligned}$$

Odtud určíme intenzity

$$\begin{aligned}
q_{j,j+1} &= \lambda, & 0 \leq j \leq N - 1, \\
q_{j,j-1} &= j\mu, & 1 \leq j \leq N, \\
q_j &= \lambda + j\mu, & 1 \leq j \leq N - 1, \\
q_0 &= \lambda, \\
q_N &= N\mu, \\
q_{ij} &= 0 \quad \text{jinak.}
\end{aligned}$$

Matice intenzit je tedy

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)\mu & -(\lambda+(N-1)\mu) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N\mu & -N\mu
\end{pmatrix}.$$

Soustava rovnic $\boldsymbol{\pi}^T Q = \mathbf{0}^T$ pro výpočet limitního rozdělení je

$$\begin{aligned} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 &= 0, \\ \lambda\pi_{j-1} - (\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1} &= 0, \quad 1 \le j \le N-1, \\ \lambda\pi_{N-1} - N\mu\pi_N &= 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Rovnice můžeme řešit jednu po druhé; postupným řešením odvodíme rekurentní vztah

$$\pi_j = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}, \quad 1 \le j \le N. \tag{3.26}$$

Odtud a z podmínky $\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$ dostaneme

$$\pi_j = \frac{\rho^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}, \quad 0 \le j \le N,$$

kde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Vztah (3.26) dostaneme i rychleji, když zavedeme

$$K_j = j\mu\pi_j - \lambda\pi_{j-1}, \; 1 \le j \le N.$$

Soustava (3.25) potom je

$$\begin{aligned} K_1 &= 0, \\ K_{j+1} - K_j &= 0, \quad 1 \le j \le N-1, \\ K_N &= 0, \end{aligned}$$

tedy $K_j = 0, \; 1 \le j \le N$, odkud plyne opět (3.26).

Příklad 3.7. V tovární hale, ve které je nepřetržitý provoz, pracuje N automatických strojů. U každého stroje může dojít k poruše, přičemž výskyt poruchy nezávisí na předchozím stavu stroje ani na stavu ostatních strojů. O stroje se stará r opravářů. Stroj, který se porouchá, se začne okamžitě opravovat, pokud je nějaký opravář volný; pokud je všech r opravářů zaměstnáno, stroj nepracuje a čeká na opravu. Předpokládá se, že na opravě jednoho stroje pracuje jen jeden opravář a opraváři pracují nezávisle.

Předpokládejme, že každý stroj, který v čase t pracuje, se během intervalu $(t, t+h]$ porouchá s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$. Stroj, který je v čase t opravován, je v intervalu $(t, t+h]$ znovu uveden do provozu s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, $\mu > 0$.

Nechť X_t je počet strojů, které v čase t nepracují; za předpokladů, které jsme učinili, je $\{X_t, t \geq 0\}$ homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $S = \{0, 1, \dots, N\}$.

Podobnými úvahami jako v předešlém příkladě zjistíme, že

$$\begin{aligned}
p_{j,j+1}(h) &= (N-j)\lambda h + o(h), && 0 \leq j < N,\\
p_{j,j-1}(h) &= j\mu h + o(h), && 1 \leq j \leq r,\\
p_{j,j-1}(h) &= r\mu h + o(h), && r < j \leq N,\\
p_{j,j+k}(h) &= o(h), && 2 \leq k \leq N-j,\\
p_{j,j-k}(h) &= o(h), && 2 \leq k \leq j
\end{aligned}$$

a snadno též určíme pravděpodobnosti $p_{jj}(h)$. Intenzity přechodu jsou potom

$$\begin{aligned}
q_{j,j+1} &= (N-j)\lambda, && 0 \leq j < N,\\
q_{j,j-1} &= j\mu, && 1 \leq j \leq r,\\
q_{j,j-1} &= r\mu, && r < j \leq N,\\
q_{jk} &= 0, && j \neq k \text{ jinak}
\end{aligned}$$

a celkové intenzity

$$\begin{aligned}
q_0 &= N\lambda,\\
q_j &= (N-j)\lambda + j\mu, && 1 \leq j \leq r,\\
q_j &= (N-j)\lambda + r\mu, && r < j < N,\\
q_N &= r\mu.
\end{aligned}$$

Určeme limitní pravděpodobnosti podle věty 3.15. Soustava rovnic $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T$ je

$$\begin{aligned}
-N\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 &= 0,\\
(N-j+1)\lambda\pi_{j-1} - ((N-j)\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1} &= 0, && 1 \leq j < r,\\
(N-j+1)\lambda\pi_{j-1} - ((N-j)\lambda + r\mu)\pi_j + r\mu\pi_{j+1} &= 0, && r \leq j < N,\\
\lambda\pi_{N-1} - r\mu\pi_N &= 0.
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že tato soustava se rozpadá na dvě části. Označíme-li

$$K_j = j\mu\pi_j - (N-j+1)\lambda\pi_{j-1}, \quad K_j^* = r\mu\pi_j - (N-j+1)\lambda\pi_{j-1},$$

můžeme ji přepsat do tvaru

$$
\begin{aligned}
K_1 &= 0, \\
K_{j+1} - K_j &= 0, \quad 1 \le j < r, \\
K_{j+1}^* - K_j^* &= 0, \quad r \le j < N, \\
K_N^* &= 0.
\end{aligned}
$$

Odtud spolu s rovností $K_r = K_r^*$ máme $K_j = 0,\ 1 \le j \le r, \quad K_j^* = 0,\ r \le j \le N.$ Dostáváme tak rekurentní vztahy

$$\pi_j = \frac{(N-j+1)\lambda}{j\mu}\pi_{j-1}, \quad 1 \le j < r,$$

$$\pi_j = \frac{(N-j+1)\lambda}{r\mu}\pi_{j-1}, \quad r \le j \le N,$$

ze kterých odvodíme, že

$$\pi_j = \binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, \qquad 1 \le j < r,$$

$$\pi_j = \frac{N(N-1)\dots(N-j+1)}{r!r^{j-r}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, \quad r \le j \le N.$$

Hodnotu π_0 určíme z podmínky $\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$.

3.4. Poissonův proces

V příkladu 3.1 jsme uvažovali proces $\{X_t, t \ge 0\}$ celočíselných náhodných veličin, který má nezávislé přírůstky $X_{t+h} - X_t$ (počet událostí v intervalu $(t, t+h]$), a pro který platí

$$
\begin{aligned}
P(X_{t+h} - X_t = 1) &= \lambda h + o(h) \\
P(X_{t+h} - X_t = 0) &= 1 - \lambda h + o(h) \\
P(X_{t+h} - X_t \ge 2) &= o(h)
\end{aligned}
$$

stejnoměrně pro všechna t.

Víme již, že jde o Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $S = \{0, 1, \dots\}$, s počátečním rozdělením $p_0(0) = P(X_0 = 0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $j \neq 0$ a intenzitami přechodu $q_{i,i+1} = \lambda, q_i = -q_{ii} = \lambda, q_{ij} = 0$ jinak. Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ bychom mohli určit např. ze soustavy Kolmogorovových prospektivních rovnic (3.16). Již jsme se zmínili, že pokud se omezíme pouze na určení absolutních pravděpodobností $p_j(t), j \in S$ s počátečním rozdělením $p_i = p_i(0) = 1, p_j = p_j(0) = 0$ $j \neq i$, stačí řešit soustavu diferenciálních rovnic, které odpovídají i–tému řádku matice $\boldsymbol{P}(t)$, t. j. máme řešit soustavu diferenciálních rovnic

$$p_j'(t) = -p_j(t)q_j + \sum_{k \neq j} p_k(t)q_{kj}, \quad j \in S$$

$\neq 0$ len pro $k = j-1$

s počáteční podmínkou

$$p_i(0) = 1, \; p_j(0) = 0, \quad j \neq i,$$

$i = 0$

v našem případě soustavu

$$\text{(3.27)} \qquad \begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) &= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t), \quad 1 \leq j < \infty \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$\text{(3.28)} \qquad p_0(0) = 1, \quad p_j(0) = 0, \; j > 0.$$

Soustava (3.27) je soustava obyčejných lineárních diferenciálních rovnic a mohli bychom je řešit jednu po druhé; zde si uvedeme metodu vytvořující funkce.

Uvažujme vytvořující funkci rozdělení $\{p_j(t), j \in \mathbb{N}_0\}$,

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j$$

jako funkci dvou proměnných s, t. Vynásobíme-li j–tou rovnici soustavy (3.27) výrazem s^j a potom formálně sečteme všechny takto vynásobené rovnice, dostaneme vztah

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j = -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j(t) + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t)s^j = -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j(t) + \lambda s \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j.$$

Tento výraz můžeme vyjádřit pomocí vytvořující funkce Π jako

$$\text{(3.29)} \qquad \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = -\lambda \Pi(s,t) + \lambda s \, \Pi(s,t) = -\lambda(1-s)\Pi(s,t)$$

a počáteční podmínku (3.28) přepsat jako

$$\Pi(s,0) = 1. \tag{3.30}$$

Pro pevné s lze (3.29) řešit jako obyčejnou lineární diferenciální rovnici v proměnné t; obecné řešení této rovnice je

$$\Pi(s,t) = C(s)e^{-\lambda t(1-s)},$$

kde $C(s)$ je konstanta závislá pouze na s. Z počáteční podmínky (3.30) plyne $C(s) = 1$, tedy

$$\Pi(s,t) = e^{-\lambda t + \lambda s\ t} = e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}s^j.$$

Odtud je vidět, že

$$p_j(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}, \quad 0 \le j < \infty, \quad t > 0$$

jsou hledané absolutní pravděpodobnosti; jde o Poissonovo rozdělení s parametrem λt. Odtud také plyne např., že střední počet událostí, které nastanou v intervalu $(0,t]$, je λt.

Protože podle předpokladu počet událostí v libovolném intervalu $(s, s+t]$ závisí jen na délce tohoto intervalu, plyne odtud, že také přírůstky $X_{s+t} - X_s$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem λt pro všechna $s, t > 0$. Říkáme, že proces $\{X_t\}$ má *stacionární přírůstky*.

Poznámka. Proces $\{X_t, t \ge 0\}$ celočíselných náhodných veličin, který reprezentuje počet nějakých událostí, které se vyskytnou v intervalu $[0,t]$ se nazývá *čítací proces*. Poissonův proces s intenzitou λ je tedy čítací proces s nezávislými a stacionárními přírůstky takový, že $X_t = 0$ a pro $t > 0$ má X_t Poissonovo rozdělení s parametrem λt.

Nechť $S_j, j = 1, 2, \ldots$ značí dobu mezi příchodem události $j-1$ a j, tedy dobu, po kterou řetězec setrvá ve stavu $j-1$. Podle věty 3.5 jsou S_j náhodné veličiny, které mají exponenciální rozdělení se stejným parametrem λ, t. j. se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Ukažme, že S_j jsou vzájemně nezávislé:

Pro S_1 a S_2 máme

$$P(S_1 > x, S_2 > y) = \int_x^{\infty} P(S_2 > y | S_1 = u\,)\lambda e^{-\lambda u}\, du\,,$$

dále podle věty 3.4

$$P(S_2 > y|S_1 = u\,) = P(X_t = 1, u\ \le t \le y + u\,|X_u = 1) = e^{-\lambda y},$$

tedy

$$P(S_1 > x, S_2 > y) = e^{-\lambda y} \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda u} du = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} = P(S_1 > x) P(S_2 > y);$$

odtud již plyne, že S_1, S_2 jsou nezávislé. Podobně lze ukázat nezávislost náhodných veličin $S_1, S_2, \dots, S_n$, $n \geq 2$.

Vnořený diskrétní řetězec $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ Poissonova procesu má matici pravděpodobností přechodu Q^* s prvky $q^*_{ii} = 0$, $q^*_{i,i+1} = 1$, $q^*_{ij} = 0$ jinak. Poissonův proces je regulární, neboť $q_i = \lambda \; \forall i$, tedy podle věty 3.8 je s pravděpodobností jedna

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q_{Y_i}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} = \infty.$$

Všimněme si ještě rozdělení náhodné veličiny $W_n = S_1 + \cdots + S_n$, kterou lze interpretovat jako dobu čekání na výskyt n-té události Poissonova procesu. Vzhledem k tomu, že $S_1, \dots, S_n$ jsou nezávislé se stejným exponenciálním rozdělením, je rozdělení W_n dáno hustotou

$$w_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

(Erlangovo rozdělení řádu n).

Příklad 3.8. Na autobusovou zastávku přijíždějí autobusy linky č. 1 a linky č. 2. Předpokládáme, že příjezdy autobusů obou linek jsou události Poissonových procesů s intenzitami λ_1 a λ_2, přičemž tyto procesy jsou vzájemně nezávislé. Střední počet autobusů linky č. 1, které přijedou na stanici během časového intervalu délky t, je $\lambda_1 t$, střední počet všech autobusů, které přijedou v tomto intervalu, je $(\lambda_1 + \lambda_2)t$. Doba čekání S na příjezd autobusu linky č. 1 má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda_1}$, podobně doba čekání T na příjezd autobusu linky č. 2 má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda_2}$. Doba, za kterou na stanici přijede další (druhý) spoj linky č. 1, má Erlangovo rozdělení řádu 2 s parametrem λ_1, tedy se střední hodnotou $\frac{2}{\lambda_1}$.

Pravděpodobnost, že na zastávku přijede jako první autobus linky č. 2, je

$$P(T < S) = \int_0^\infty \left(\int_0^s \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \right) \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} ds = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \, (1 - e^{-\lambda_2 s}) ds = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Protože i zbytek doby čekání na příjezd autobusu linky č. 1 má exponenciální rozdělení s parametrem λ_1 a doby mezi příjezdy jsou nezávislé, je pravděpodobnost, že první dva autobusy, které přijedou do stanice, budou autobusy linky č. 2, rovna $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^2$.

3.5. Lineární proces růstu (Yuleův proces)

Nějaká populace se skládá z jedinců, kteří se mohou rozmnožovat, nemohou však zanikat. Předpokládejme, že z každého jedince může v intervalu $(t, t+h]$ vzniknout nový jedinec s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ nezávisle na osudu ostatních jedinců (žádný jedinec s pravděpodobností $1 - \lambda h + o(h), \lambda > 0$.) Nechť X_t značí počet jedinců, kteří se v populaci nacházejí v čase t; je to Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $S \subset \mathbb{N}_0$. Pravděpodobnosti přechodu jsou

$$\begin{aligned}
p_{j,j+1}(h) &= \binom{j}{1}(\lambda h + o(h))(1 - \lambda h + o(h))^{j-1} = j\lambda h + o(h) \\
p_{j,j+k}(h) &= o(h) \quad k \geq 2 \\
p_{jj}(h) &= (1 - \lambda h + o(h))^j = 1 - j\lambda h + o(h);
\end{aligned}$$

ostatní pravděpodobnosti přechodu jsou nulové. Intenzity přechodu jsou

$$q_{j,j+1} = j\lambda, \; q_j = j\lambda, \; q_{jk} = 0 \text{ jinak},$$

tedy matice intenzit $\boldsymbol{Q}$ je

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -4\lambda & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že na počátku je v populaci pouze jeden jedinec, t. j. uvažujme počáteční rozdělení $p_1(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $j > 1$ (obecněji bychom mohli předpokládat, že na počátku je v populaci i_0 jedinců, $i_0 \geq 1$.) Omezíme-li se opět na výpočet absolutních pravděpodobností, zjistíme, že musí splňovat soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
p_1'(t) &= -\lambda p_1(t) \\
p_j'(t) &= -\lambda j p_j(t) + \lambda(j-1)p_{j-1}(t), \quad j > 1
\end{aligned} \tag{3.31}$$

s počáteční podmínkou $p_1(0) = 1$. Soustavu (3.31) budeme řešit opět metodou vytvořující funkce: vynásobíme-li j-tou rovnici výrazem s^j a sečteme všechny rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} p_j'(t)s^j &= -\lambda \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(t)s^j + \lambda \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)p_{j-1}(t)s^j \\
&= -\lambda s \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(t)s^{j-1} + \lambda s^2 \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(t)s^{j-1},
\end{aligned}$$

což, vyjádřeno pomocí vytvořující funkce Π posloupnosti $\{p_j(t)\}$, je

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = -\lambda s\,\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} + \lambda s^2 \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s},$$

neboli parciální diferenciální rovnice

$$\lambda s(1-s)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = 0 \tag{3.32}$$

s počáteční podmínkou

$$\Pi(0,s) = s. \tag{3.33}$$

Řešení rovnice (3.32) je dáno větou B.7 v Dodatku B. Podle této věty nejprve řešíme pomocnou obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{ds}{\lambda s\,(1-s)} = dt.$$

Řešením dostáváme pro $0 < s < 1$ (použijeme rozklad na parciální zlomky)

$$\ln s\, - \ln(1-s) = \lambda t + C,$$

neboli

$$\frac{s}{1-s} = C_1 e^{\lambda t}.$$

První integrál pomocné diferenciální rovnice je $\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t} = C_1$ a podle věty B.7 je obecné řešení rovnice (3.32) tvaru

$$\Pi(s,t) = F\left(\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}\right),$$

kde F je nějaká diferencovatelná funkce. Z počáteční podmínky (3.33) plyne, že

$$F\left(\frac{s}{1-s}\right) = s.$$

Položíme-li $\frac{s}{1-s} = x$, dostaneme

$$F(x) = \frac{x}{1+x},$$

tedy

$$\Pi(s,t) = \frac{s}{s - s\,e^{\lambda t} + e^{\lambda t}} = \frac{se^{-\lambda t}}{1 - s(1-e^{-\lambda t})}.$$

Poslední výraz můžeme ještě rozvinout v mocninnou řadu a dostaneme

$$\Pi(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} se^{-\lambda t}[s(1-e^{-\lambda t})]^k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1} s^k,$$

odkud můžeme uzavřít, že

$$P(X_t = k) = p_k(t) = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Snadno zjistíme, že $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$. Pravděpodobnosti $p_j(t)$ představují geometrické rozdělení (interpretované jako celkový počet bernoulliovských pokusů, které jsou nutné do dosažení prvního zdařilého pokusu.) Střední rozsah populace v čase t je $EX_t = e^{\lambda t}$.

Podobně lze ukázat, že při počáteční podmínce $p_{i_0}(0) = 1$ pro nějaké $i_0 > 1$ je vytvořující funkce absolutních pravděpodobností rovna

$$\Pi(s,t) = \left[\frac{se^{-\lambda t}}{1 - s(1-e^{-\lambda t})}\right]^{i_0},$$

což je vytvořující funkce negativně binomického rozdělení.

Proces je regulární, neboť pro stavy vnořeného řetězce $\{Y_n\}$ při počáteční podmínce $X_0 = i_0 \geq 1$ platí $P_{i_0}(Y_i = i + i_0) = 1, i = 1, 2, \ldots$ a tedy s pravděpodobností 1

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{Y_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(i + i_0)} = \infty.$$

3.6. Obecný proces růstu

Uvažuje se opět populace jedinců, kteří se mohou pouze rozmnožovat. Rozsah populace v čase $t \geq 0$ je popsán Markovovým řetězcem $\{X_t, t \geq 0\}$ se spočetnou množinou stavů, který je definován počátečním rozdělením $p_{i_0}(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $j > i_0$ $(i_0 \geq 0)$ a maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_{i_0} & \lambda_{i_0} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda_{i_0+1} & \lambda_{i_0+1} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda_{i_0+2} & \lambda_{i_0+2} & \ldots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

přičemž intenzity růstu $\lambda_j > 0$ vyjadřují obecnou (tedy nejen lineární) závislost na okamžitém stavu j dané populace.

Absolutní pravděpodobnosti $P(X_t = j) = p_j(t)$ vyhovují soustavě diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} p'_{i_0}(t) &= -\lambda_{i_0} p_{i_0}(t), \\ p'_j(t) &= \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - \lambda_j p_j(t), \quad j > i_0 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $p_{i_0}(0) = 1$. Postupným řešením jednotlivých rovnic k přihlédnutím k počáteční podmínce dostaneme

$$\begin{aligned} p_{i_0}(t) &= e^{-\lambda_{i_0} t}, \\ p_j(t) &= \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} p_{j-1}(s) ds, \quad j > i_0. \end{aligned}$$

Proces je regulární tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{j=i_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = \infty,$$

neboť pro příslušný vnořený řetězec $\{Y_n\}$ platí, že pro každé $i_0 \geq 0$ je $P_{i_0}(Y_n = n + i_0) = 1$ a dále lze postupovat podle věty 3.8.

3.7. Lineární proces množení a zániku

Vraťme se k procesu, popsaném v příkladu 3.2. Uvažovali jsme populaci, jejíž jedinci se mohou množit a zanikat, pravděpodobnost, že z jedince vznikne během intervalu $(t, t+h]$ nový jedinec, je $\lambda h + o(h)$, více jedinců vznikne s pravděpodobností $o(h)$. Každý jedinec s pravděpodobností $\mu h + o(h)$ během intervalu $(t, t+h]$ zanikne, přičemž osudy jedinců jsou nezávislé. Rozsah populace X_t v čase t vytváří Markovův řetězec s intenzitami

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= j\lambda, \quad 0 \leq j < \infty \\ q_{j,j-1} &= j\mu, \quad 1 \leq j < \infty \\ q_{jk} &= 0 \qquad \text{jinak} \\ q_j &= j(\lambda + \mu), \quad 0 \leq j < \infty \end{aligned}$$

(k odvození použijeme stejných pravděpodobnostních úvah, které jsme použili již vícekrát.)

Absolutní pravděpodobnosti $p_j(t) = P(X_t = j)$ vyhovují soustavě diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
p_0'(t) &= \mu p_1(t) \\
p_j'(t) &= (j-1)\lambda p_{j-1}(t) - j(\mu+\lambda)p_j(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), \; j = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Předpokládejme, že $p_1(0) = 1$.

Použijeme-li metodu vytvořující funkce, dostaneme již známým postupem rovnici

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\mu p_{j+1}(t)s^j + \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)\lambda p_{j-1}(t)s^j - \sum_{j=1}^{\infty} j(\lambda+\mu)p_j(t)s^j,$$

neboli

(3.34)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} &= \mu\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} + \lambda s^2\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} - s(\lambda+\mu)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} \\
&= [\mu + \lambda s^2 - s(\lambda+\mu)]\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = (\mu - \lambda s)(1-s)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}
\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

(3.35) $$\Pi(s,0) = s\ .$$

Pro $\lambda = \mu$ má (3.34) tvar

(3.36) $$\lambda(1-s)^2\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = 0.$$

Pomocná obyčejná diferenciální rovnice má v tomto případě tvar

$$\frac{ds}{\lambda(1-s)^2} = -dt$$

a její první integrál je

$$\frac{1}{1-s} + \lambda t = C,$$

tedy obecné řešení rovnice (3.36) je

$$\Pi(s,t) = F\left(\lambda t + \frac{1}{1-s}\right)$$

pro nějakou diferencovatelnou funkci F. Tu určíme z počáteční podmínky (3.35). Dostaneme

$$H(s,0) = s \;= F\left(\frac{1}{1-s}\right)$$

a zavedeme-li proměnnou $x = \frac{1}{1-s}$, máme

$$F(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Hledané řešení tedy je

$$\begin{aligned} H(s,t) &= \frac{\lambda t + \frac{1}{1-s} - 1}{\lambda t + \frac{1}{1-s}} = \frac{\lambda t + s(1-\lambda t)}{1+\lambda t - \lambda t s} = \left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t} + s\frac{1-\lambda t}{1+\lambda t}\right)\frac{1}{1-\frac{\lambda t}{1+\lambda t}s} \\ &= \left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t} + s\frac{1-\lambda t}{1+\lambda t}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^j s^j. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{\lambda t}{1+\lambda t} \\ p_j(t) &= \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}}, \quad 1 \le j < \infty. \end{aligned}$$

Nyní uvažujme případ $\lambda \neq \mu$. Pomocná obyčejná diferenciální rovnice má tvar

$$\frac{ds}{(\mu - \lambda s)(1-s)} = -dt$$

a jejím řešením (opět použijeme rozklad na parciální zlomky) dostaneme

$$\ln(\mu - \lambda s) - \ln(1-s) = -(\mu - \lambda)t + C,$$

první integrál je

$$\frac{\mu - \lambda s}{1-s}e^{(\mu-\lambda)t} = C_1$$

a obecné řešení parciální diferenciální rovnice (3.34) je

$$H(s,t) = F\left(\frac{\mu - \lambda s}{1-s}e^{(\mu-\lambda)t}\right) = F\left(\frac{\mu - \lambda s}{1-s}e^{-(\lambda-\mu)t}\right).$$

Z počáteční podmínky (3.35) plyne

$$H(s,0) = F\left(\frac{\mu - \lambda s}{1-s}\right) = s$$

a položíme-li $\frac{\mu-\lambda s}{1-s} = x$, dostaneme

$$F(x) = \frac{\mu - x}{\lambda - x}.$$

Vytvořující funkce po dosazení a rozšíření výrazem $-e^{(\lambda-\mu)t}$ je

$$\Pi(s,t) = \frac{\mu(1-s) - (\mu - \lambda s)e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda(1-s) - (\mu-\lambda s)e^{-(\lambda-\mu)t}} = \frac{\mu(1-e^{(\lambda-\mu)t}) - s(\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t})}{(\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}) - \lambda s(1-e^{(\lambda-\mu)t})}.$$

Zavedeme-li pro zjednodušení zápisu další označení

$$A(t) = \frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}},$$

dostaneme po dalším výpočtu

$$\Pi(s,t) = \frac{1}{1-\lambda s\, A(t)}\left[\mu A(t) - \frac{\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}} s\right] = \frac{\mu A(t) - (\lambda A(t) + \mu A(t) - 1)s}{1-\lambda s\, A(t)},$$

neboli

$$\Pi(s,t) = \mu A(t) + (1-\lambda A(t))(1-\mu A(t))\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda A(t))^{j-1}s^j,$$

odkud můžeme uzavřít, že

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \mu A(t) \\ p_j(t) &= (1-\lambda A(t))(1-\mu A(t))(\lambda A(t))^{j-1} \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Matice pravděpodobností přechodu mezi stavy vnořeného řetězce $\{Y_n\}$ je

$$Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

vidíme tedy, že stav 0 je absorpční; populace, která zanikne, se již nemůže obnovit.

Pravděpodobnost, že populace v čase t zanikne je

$$P(X_t = 0) = p_0(t) = \begin{cases} \frac{\lambda t}{1+\lambda t} & \lambda = \mu \\ \frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}\mu & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

a limitním přechodem pro $t \to \infty$ zjistíme, že pravděpodobnost vymření populace je

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 & \lambda \le \mu \\ \frac{\mu}{\lambda} & \lambda > \mu \end{cases}.$$

3.8. Obecný proces množení a zániku

Uvažujme opět populaci jedinců, kteří se mohou rozmnožovat i zanikat; rozsah populace v čase t je Markovův řetězec, který je definován intenzitami

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots \\ q_{j,j-1} &= \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots \\ q_{jk} &= 0 \quad \text{jinak} \\ q_0 &= \lambda_0 \\ q_j &= \lambda_j + \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

matice intenzit tedy je

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

a soustava diferenciálních rovnic pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ má tvar

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_j'(t) &= \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1,\ p_j(0) = 0,\ j \neq i$.

Omezme se na výpočet limitních pravděpodobností. K tomu nám poslouží věta 3.15. Budeme předpokládat, že všechny intenzity λ_j, $j \geq 0$ a μ_j, $j > 0$ jsou kladné. Potom matice pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce je

$$Q^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2} & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix},$$

vidíme tedy, že vnořený řetězec je nerozložitelný. O tom, zda všechny jeho stavy jsou trvalé, můžeme rozhodnout např. podle věty 2.23, nebo zjistit, zda existuje stacionární rozdělení (k tomu podle věty 3.14 stačí ukázat, že $\sum_{j\in S} \pi_j q_j < \infty$, kde $\{\pi_j\}$ je řešení soustavy $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T$, neboť z důkazu věty 3.14 plyne, že $\{\pi_j q_j\}$ je invariantní míra ve vnořeném řetězci.)

Pokud jsou tedy splněny podmínky věty 3.15, můžeme limitní pravděpodobnosti $\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t)$ hledat jako řešení soustavy $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T$, které vyhovuje podmínkám $\pi_j > 0$, $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$.

Uvažovaná soustava zní

$$-\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0,$$
$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0, \quad j \ge 1.$$

Položíme-li

$$\mu_j\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1} = K_j, \quad j \ge 1,$$

můžeme naši soustavu přepsat ve tvaru

$$K_1 = 0$$
$$K_{j+1} - K_j = 0, \quad j \ge 1.$$

Zřejmě tedy $K_j = 0$ pro $j \ge 1$, takže

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{j-1} = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}}{\mu_j\mu_{j-1}}\pi_{j-2} = \cdots = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\ldots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\pi_0 = \rho_j\pi_0,$$

kde jsme označili

$$\rho_j = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\ldots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\ldots\mu_1}, \quad j \ge 1. \tag{3.37}$$

Definujeme-li ještě $\rho_0 = 1$, můžeme psát

$$\pi_j = \rho_j\pi_0, \quad j \ge 0.$$

Řešení $\{\pi_j,\ j \ge 0\}$ bude pravděpodobnostní rozdělení právě tehdy, když $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < \infty$; potom bude platit

$$\pi_j = \rho_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k\right)^{-1} \text{ a } \pi_j > 0, \quad j \ge 0. \tag{3.38}$$

Pokud bude $\lambda_0 = 0$, bude stav 0 absorpční a vnořený řetězec bude rozložitelný (bude $q^*_{00} = 1$); pravděpodobnost, že populace, která má na počátku právě i jedinců, někdy vymře, je stejná jako pravděpodobnost, že vnořený řetězec, který byl na počátku ve stavu i někdy skončí v absorpčním stavu 0. Hledaná pravděpodobnost vymření je $\lim_{t\to\infty} p_{i0}(t)$; označíme-li ji u_i, můžeme ji určit podle věty 2.20 pomocí pravděpodobností q^*_{ij} jako řešení soustavy

$$u_i = q^*_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} q^*_{ik} u_k, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

neboli jako řešení soustavy

$$u_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} u_2$$
$$u_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} u_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} u_{i+1}, \quad i \geq 2.$$

Bez důkazu ještě uveďme, že postačující podmínka pro regularitu řetězce je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = \infty.$$

Tato podmínka zaručuje regularitu v procesu růstu, kdy se rozsah populace jen zvětšuje; nyní to však není podmínka nutná. Pro lineární proces množení a zániku je zřejmě tato podmínka splněna.

3.9. Systémy hromadné obsluhy

Procesy množení a zániku mají četné aplikace např. v epidemiologii či demografii; lze jimi také modelovat celou škálu tzv. *systémů hromadné obsluhy*.

Systémem hromadné obsluhy obecně rozumíme dynamický systém, ve kterém pracuje určitý počet stanic obsluhy (např. bankovní přepážky, nádražní pokladny, opravárenské a servisní linky apod.) Do systému přicházejí zákazníci, aby byli obslouženi; pokud kapacita obsluhy není postačující, vytvářejí frontu, ve které panuje určitý režim, po ukončení obsluhy ze systému odcházejí. Obecně předpokládáme, že doby mezi příchody po sobě následujících zákazníků jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením A, doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením B. Systém obsluhy je popsán trojicí $(A/B/c)$, kde c je počet stanic obsluhy. Za písmena A, B dosazujeme zpravidla M (exponenciální rozdělení), D (deterministické rozdělení) nebo G (obecné rozdělení).

Systém $(M/M/\infty)$.

Příchody zákazníků do tohoto systému tvoří Poissonův proces s intenzitou λ (tedy doby mezi příchody jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$); doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Počet stanic obsluhy je tak velký, že každý zákazník, který přijde do systému, je ihned obsluhován a nemusí čekat ve frontě. Je-li X_t počet zákazníků v systému v čase t, je $\{X_t, t \geq 0\}$ proces množení a zániku s intenzitami množení a zániku

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \lambda, \quad 0 \leq j < \infty \\ \mu_j &= j\,\mu, \quad 1 \leq j < \infty,\end{aligned}$$

tj. Markovův řetězec se spojitým časem a maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Diferenciální rovnice pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ tudíž jsou

$$\begin{aligned}p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_j'(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu)p_j(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), \quad 1 \leq j < \infty\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0, j \neq i$. Známou metodou vytvořující funkce převedeme tuto soustavu na parciální diferenciální rovnici pro vytvořující funkci $\Pi(s,t)$ a dostaneme rovnici

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \lambda(s-1)\Pi(s,t) - \mu(s-1)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s},$$

čili

$$\mu(1-s)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \lambda(1-s)\Pi(s,t) \tag{3.39}$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s,0) = s^i$.

Řešení této rovnice plyne z věty B.8 v Dodatku B. Podle této věty nejdříve řešíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{ds}{\mu(1-s)} = -dt = \frac{d\Pi}{\lambda(1-s)\Pi};$$

řešením rovnic

$$\frac{ds}{1-s} = -\mu dt, \qquad ds = \frac{\mu d\Pi}{\lambda \Pi}$$

dostaneme dva nezávislé integrály

$$(1-s)e^{-\mu t} = C_1, \qquad e^{-\frac{\lambda}{\mu}s}\Pi = C_2,$$

takže obecné řešení rovnice (3.39) je tvaru

$$F[(1-s)e^{-\mu t}, e^{-\frac{\lambda}{\mu}s}\Pi] = 0$$

pro nějakou diferencovatelnou funkci F dvou proměnných. Odtud vyjádříme Π jako implicitní funkci první proměnné ve tvaru

$$\Pi(s,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}s} f((1-s)e^{-\mu t})$$

pro nějakou diferencovatelnou funkci f. Předpokládáme-li, že na počátku byl systém prázdný (tj. $p_0(0) = 1$), splňuje Π počáteční podmínku $\Pi(s,0) = 1$. Pro funkci f tedy platí

$$e^{\frac{\lambda}{\mu}s} f(1-s) = 1,$$

a položíme-li $s = 1 - x$, dostaneme

$$f(x) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-x)}.$$

Funkce Π je tedy tvaru

$$\Pi(s,t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} e^{\frac{\lambda}{\mu}s(1-e^{-\mu t})}.$$

Rozvineme-li druhou exponencielu v mocninnou řadu, dostaneme

$$\Pi(s,t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k (1-e^{-\mu t})^k s^k;$$

absolutní pravděpodobnosti $p_k(t)$ tedy jsou

$$p_k(t) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k (1-e^{-\mu t})^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}, \quad k \geq 0.$$

Limitní pravděpodobnosti jsou

$$\pi_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \quad k \geq 0,$$

což jsou pravděpodobnosti Poissonova rozdělení s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$.

Omezíme-li se pouze na výpočet limitních pravděpodobností, můžeme je spočítat přímo podle vzorců (3.37) a (3.38). Pro $k \geq 1$ dostaneme

$$\rho_k = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k},$$

a definujeme-li $\rho_0 = 1$, máme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = e^{\frac{\lambda}{\mu}} < \infty,$$

odkud

$$\pi_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}},$$

což je předchozí výsledek. Podmínka $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k q_k < \infty$ je v tomto případě splněna a všechny stavy vnořeného řetězce jsou trvalé (a nenulové).

Systém $(M/M/c)$.

Předpoklady o příchodu zákazníků do systému a předpoklady o rozdělení dob obsluhy jsou stejné jako v předchozím případě; příchody zákazníků tedy tvoří Poissonův proces s intenzitou příchodu λ, doby obsluhy jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\mu}$, počet stanic obsluhy je $c < \infty$. Konečný počet stanic obsluhy znamená, že je-li v čase t v systému nejvýše c zákazníků, jsou všichni obsluhováni, je-li jich však více než c, je současně obsluhováno jen c z nich a zbývající čekají ve frontě. Předpokládáme-li, že délka fronty může být libovolně dlouhá, je počet zákazníků v systému (v obsluze i ve frontě celkem) Markovův řetězec se spočetnou množinou stavů a spojitým časem, s intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1} = \lambda_j = \lambda \qquad 0 \leq j < \infty$$
$$q_{j,j-1} = \mu_j = \begin{cases} j\mu & 1 \leq j \leq c \\ c\mu & c < j < \infty \end{cases}$$

(ostatní intenzity q_{jk}, $j \neq k$ jsou nulové). Jde opět o proces množení a zániku s intenzitami λ_j a μ_j právě definovanými. Omezíme-li se jen na výpočet pravděpodobností limitního rozdělení, dostaneme ze vzorce (3.37)

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j & 1 \leq j \leq c \\ \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^j & c < j < \infty; \end{cases}$$

limitní rozdělení existuje, pokud $\frac{\lambda}{\mu} < c$. Potom

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{R} & 1 \le j \le c \\ \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^j \frac{1}{R} & c < j < \infty \end{cases}$$

(kde jsme položili $\rho_0 = 1$ a $R = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k$). čo to znamená

Střední počet zákazníků v systému v ustáleném provozu je

$$\boxed{m_1 = \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j\ ,}$$

střední počet zákazníků ve frontě je

$$\boxed{m_2 = \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_{j+c}\ ,}$$

střední počet obsluhovaných zákazníků je

$$m_3 = \sum_{j=1}^{c} j\pi_j + \sum_{k=1}^{\infty} c\pi_{k+c}\ ,$$

pravděpodobnost, že zákazník nemusí na obsluhu čekat, je

$$P_1 = \sum_{j=0}^{c-1} \pi_j,$$

pravděpodobnost čekání na obsluhu je $P_2 = 1 - P_1$.

Uvažujme ještě systém $(M/M/c)$ s omezenou délkou fronty: pokud je ve frontě již r zákazníků, další zákazníci nemají do systému přístup. Počet zákazníků v systému je potom popsán Markovovým procesem s konečnou množinou stavů a intenzitami

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= \lambda_j = \lambda & & 0 \le j \le r+c-1, \\ q_{j,j-1} &= \mu_j = \begin{cases} j\mu & 1 \le j \le c, \\ c\mu & c < j \le r+c, \end{cases} \\ q_{j,k} &= 0 & & j \ne k \text{ jinak.} \end{aligned}$$

Limitní rozdělení je $\pi_j = \rho_j/R$, $0 \le j \le r+c$, kde

$$\rho_0 = 1,$$
$$\rho_j = \begin{cases} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j & 1 \le j \le c, \\ \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^j & c < j \le r+c, \end{cases}$$

zatímco

$$R = \sum_{j=0}^{r+c} \rho_j = \sum_{j=0}^{c} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{c^c}{c!}\sum_{j=c+1}^{c+r}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^j$$
$$= \sum_{j=0}^{c} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^j.$$

Systém $(M/M/1)$ s neomezenou délkou fronty je speciální případ systému $(M/M/c)$ pro $c = 1$. Limitní rozdělení existuje, pokud $\lambda < \mu$; potom

$$\rho_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \; 0 \le j < \infty, \quad R = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1},$$

tedy

$$\pi_j = \frac{\rho_j}{R} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad j \ge 0,$$

což je geometrické rozdělení s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$. Střední počet zákazníků v systému je

$$m_1 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

střední počet zákazníků ve frontě

$$m_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)},$$

střední počet obsluhovaných zákazníků je $m_3 = \frac{\lambda}{\mu}$, pravděpodobnost, že zákazník nebude na obsluhu čekat je $P_1 = \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ atd.

Určeme ještě střední dobu, kterou zákazník stráví čekáním ve frontě, a střední dobu strávenou v systému. Předpokládejme nejdříve, že zákazník se zařadí do fronty jako

k-tý, $k \geq 1$, v systému tedy v okamžiku jeho příchodu je k zákazníků ($k-1$ ve frontě a jeden, který je právě obsluhován.) Potom doba, kterou náš zákazník bude čekat ve frontě, je dána součtem dob obsluhy zákazníků ve frontě před ním a zbytku doby zákazníka, který je právě obsluhován. Všechny tyto náhodné veličiny jsou nezávislé se stejným exponenciálním rozdělením s parametrem μ (víme, že exponenciální rozdělení je rozdělení bez paměti, tudíž i zbytková doba obsluhy má exponenciální rozdělení.) Doba čekání na obsluhu zákazníka, který čeká ve frontě jako k-tý, tak má Erlangovo rozdělení řádu k, jehož distribuční funkce je

$$F_k(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^j}{j!} & x \geq 0 \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Rozdělení doby čekání vypočteme podle věty o celkové pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\mu t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^j}{j!}\right) \pi_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\mu t} \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mu t)^j}{j!}\right) \pi_{k+1} = 1 - \pi_0 - e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{(\mu t)^j}{j!} \pi_{k+1}, \end{aligned}$$

což je dále rovno

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{\mu} - e^{-\mu t}\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{(\mu t)^j}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \\ &= \frac{\lambda}{\mu} - e^{-\mu t}\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}\right) \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-(\mu - \lambda)t}\right) \end{aligned}$$

pro $t \geq 0$. Odtud již snadno zjistíme, že střední doba čekání na obsluhu je

$$w_1 = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Celková střední doba, kterou zákazník stráví v systému, je dána střední dobou strávenou ve frontě, ke které je nutno přičíst střední dobu vlastní obsluhy,

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Analogicky lze odvodit rozdělení doby strávené zákazníkem v systému; je to exponenciální rozdělení s parametrem $\mu - \lambda$.

Systém $(M/G/1)$.

Je-li rozdělení dob mezi příchody zákazníků nebo dob obsluhy jiné než exponenciální, nemůžeme počet zákazníků v systému obsluhy popsat Markovovým řetězcem, neboť takový proces nemusí mít markovskou vlastnost; v některých případech však můžeme teorie Markovových řetězců využít.

Systém $(M/G/1)$ je systém hromadné obsluhy s jednou stanicí obsluhy, ve kterém příchody zákazníků tvoří Poissonův proces s intenzitou λ (doby mezi příchody mají exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$), doby obsluhy jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s obecným rozdělením, které má distribuční funkci G a konečnou střední hodnotu m.

Uvažujme tento systém jen v časech, kdy odcházejí právě obsloužení zákazníci. Nechť X_n značí počet zákazníků ve frontě bezprostředně po odchodu $n-$tého obslouženého zákazníka $(n \geq 1)$, nechť Y_n značí počet zákazníků, kteří do systému přijdou během obsluhy $(n+1)-$ního zákazníka. Zřejmě je

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + Y_n & X_n > 0 \\ Y_n & X_n = 0. \end{cases}$$

Protože příchody zákazníků tvoří Poissonův proces a sledujeme je v disjunktních časových intervalech, jsou Y_n nezávislé náhodné veličiny se stejným diskrétním rozdělením: pro pevnou dobu τ obsluhy $(n+1)-$ního zákazníka má Y_n Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda\tau$; celková pravděpodobnost je

$$P(Y_n = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \frac{1}{k!} (\lambda\tau)^k dG(\tau) = a_k, \ k \geq 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že $\sum_{k=0}^\infty a_k = 1$, tedy $\{a_k\}$ je pravděpodobnostní rozdělení. Střední hodnota tohoto rozdělení je

$$\rho = EY_n = \sum_{k=0}^\infty k \ a_k = \lambda m.$$

Z nezávislosti Y_n plyne, že posloupnost $\{X_n\}$ má markovskou vlastnost; je to homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem a pravděpodobnostmi přechodu

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i) &= a_{j-i+1} \quad && i \geq 1, \ j \geq i-1 \\ &= a_j, && i = 0 \\ &= 0 && \text{jinak.} \end{aligned}$$

Matice pravděpodobností přechodu tudíž je

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Zabývejme se nyní podmínkami existence stacionárního rozdělení v řetězci $\{X_n\}$. Soustava rovnic $\pi^T = \pi^T P$ zní

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \quad j \geq 0. \tag{3.40}$$

Řešme tuto soustavu metodou vytvořující funkce. Označme jako $A(s)$, $\Pi(s)$ vytvořující funkce posloupností $\{a_j\}$, $\{\pi_j\}$. Vynásobíme-li obě strany ve vztahu (3.40) s^j a sečteme všechny takové rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= \pi_0 A(s) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} s^j \\ &= \pi_0 A(s) + s^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i s^i \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} s^{j-i+1} \\ &= \pi_0 A(s) + s^{-1}(\Pi(s) - \pi_0) A(s), \end{aligned}$$

odtud vyjádříme

$$\Pi(s) = \frac{(s-1)\pi_0 A(s)}{s - A(s)}. \tag{3.41}$$

Limitním přechodem pro $s \to 1$ zleva dostaneme použitím l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{s \to 1-} \Pi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \frac{\pi_0}{1-\rho}.$$

Vidíme tedy, že $\sum \pi_j$ je konvergentní, právě když $\rho < 1$, a je rovna 1 pro $\pi_0 = 1 - \rho$. Dosadíme-li zpět do (3.41), máme

$$\Pi(s) = \frac{(s-1)(1-\rho)A(s)}{s - A(s)}.$$

Pro $\rho < 1$ tedy stacionární rozdělení existuje a pravděpodobnosti π_j dostaneme rozvojem $\Pi(s)$. Střední délku fronty spočteme derivováním jako $\Pi'(1)$ (derivace zleva).

3.10. Cvičení a doplňky

Cvičení 3.1. Nechť $\boldsymbol{Q}$ je matice intenzit Markovova řetězce s N stavy a spojitým časem, t.j.

$$q_{ij} \geq 0, j \neq i, q_{ii} = -q_i \leq 0, \sum_{j=1}^{N} q_{ij} = 0.$$

Dokažte: Je-li $q_i = 0$ pro nějaké i, je $\boldsymbol{Q}$ rozložitelná matice (viz Dodatek B.)

Cvičení 3.2. Nechť $\boldsymbol{Q}$ je konečná matice intenzit taková, že $q_i > 0 \forall\, i$. Nechť

$$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{D}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{I},$$

kde $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}[\frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_N}]$, a N je řád matice. Potom $\boldsymbol{Q}^*$ je stochastická matice a je nerozložitelná. Dokažte.

Cvičení 3.3. Nechť $\boldsymbol{Q}$ je konečná matice intenzit taková, že $q_i > 0 \forall\, i$. Potom číslo nula je vlastní číslo matice $\boldsymbol{Q}$. Dokažte.

Cvičení 3.4. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem λ, t.j. s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Dokažte, že náhodná veličina $W_n = X_1 + \dots + X_n$ má hustotu

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a distribuční funkci

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(Erlangovo rozdělení řádu n).

Cvičení 3.5. Nechť X je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením. Potom pro všechna $s, t \geq 0$ platí

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

Cvičení 3.6. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením, X s parametrem λ a Y s parametrem μ. Potom náhodná veličina $\min(X, Y)$ má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda + \mu$ a dále platí

$$P(X > Y) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Cvičení 3.7. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, X_n má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}_0$. Potom platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n < \infty \text{ s.j.} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

(Resnick (1992), proposition 5.1.1).

Cvičení 3.8. Uvažujme matici

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ pq & -p & p^2 & 0 & \dots \\ p^2q & 0 & -p^2 & p^3 & \dots \\ p^3q & 0 & 0 & -p^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

kde $0 < p < 1$, $p + q = 1$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{Q}$ je matice intenzit Markovova řetězce se spojitým časem a spočetnou množinou stavů. Najděte matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném diskrétním řetězci a ukažte, že v tomto řetězci existuje stacionární rozdělení. Dále ukažte, že jediné řešení soustavy $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^T$, pro které $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j < \infty$, je triviální řešení $\pi_j = 0\ \forall\ j \geq 0$, tedy stacionární rozdělení v řetězci s maticí intenzit $\boldsymbol{Q}$ neexistuje.

Cvičení 3.9. Uvažujte model telefonní ústředny se třemi linkami. Určete matici $\boldsymbol{Q}^*$, najděte $\boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{Q}t}$ pomocí Perronova vzorce a určete rozdělení absolutních pravděpodobností v čase t.

Cvičení 3.10. Na stavbě pracuje N svářečů, kteří náhodně a nezávisle odebírají proud. Svářeč, který v čase t neodebírá proud, začne v intervalu $(t, t + h]$ proud odebírat s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$; svářeč, který v čase t proud odebíral, ukončí odběr v intervalu $(t, t + h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$. Nechť X_t značí počet svářečů, kteří v čase t odebírají proud. Najděte matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ a dokažte, že limitní rozdělení je binomické s parametry N a $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Cvičení 3.11. Příjezdy autobusu do stanice tvoří Poissonův proces s intenzitou λ. Cesta autobusem ze stanice do místa bydliště trvá R časových jednotek; stejná cesta vykonaná pěšky trvá S časových jednotek. Osoba, která přijde na stanici, vyčkává příjezdu autobusu, ale jen po dobu s; pokud do této doby autobus nepřijede, vydá se na cestu pěšky. Určete střední dobu, za kterou osoba, poté co přišla na stanici, dorazí do místa bydliště.

Cvičení 3.12. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou λ. Nechť S_1 je doba do příchodu první události tohoto procesu. Dokažte, že

$$P(S_1 \leq s | X_t = 1) = \frac{s}{t}, \quad 0 < s < t$$

(rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, t)$).

Cvičení 3.13. Uvažujme stanici obsluhy, která může obsluhovat současně nejvýše dva zákazníky (např. dvojitá telefonní budka.) Pravděpodobnost příchodu zákazníka v intervalu $(t, t+h]$ je $\lambda h + o(h)$, pravděpodobnost, že zákazník, který je v čase t ještě obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h]$ obsloužen, je $\mu h + o(h)$. Zákazníci, kteří nemohou být ihned obslouženi, se řadí do jediné fronty.

a) Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_j(t)$, že v čase t bude ve stanici (v obsluze i ve frontě) právě j zákazníků.

b) Zjistěte, zda existují limitní pravděpodobnosti; pokud ano, spočtěte je.

c) Spočtěte střední počet zákazníků v systému v ustáleném provozu.

Cvičení 3.14. Kapacita podzemního parkoviště obchodního domu je 100 vozů. Na parkoviště přijíždí vůz v průměru každých 5 minut; je-li obsazeno, vůz nečeká a odjíždí. Průměrná doba, kterou vůz parkuje, je jedna hodina. Najděte limitní rozdělení počtu vozů na parkovišti, předpokládáme-li, že doby mezi příjezdy na parkoviště i doby parkování jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením.

Cvičení 3.15. V holičství pracují 3 holiči. Každý z nich obsluhuje jednoho zákazníka průměrně 10 minut. Do holičství přichází v průměru 12 zákazníků za hodinu. V případě, že žádný z holičů není volný, zákazníci čekají v jediné frontě, přičemž zákazník, který by se musel do fronty zařadit jako čtvrtý, odchází neobsloužen.

Určete limitní rozdělení počtu zákazníků v holičství (ve frontě i v obsluze), střední počet zákazníků ve frontě a pravděpodobnost, že zákazník odejde neobsloužen.

4. PROCESY OBNOVY

4.1. Definice a základní vlastnosti

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že Poissonův proces je tzv. čítací proces, tedy proces celočíselných náhodných veličin, který udává počet událostí, jež se vyskytnou v časovém intervalu $[0, t]$. Víme také, že doby mezi příchody jednotlivých událostí Poissonova procesu jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem λ (střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$), kde $\lambda > 0$ je intenzita Poissonova procesu. Nyní se budeme zabývat obecnějšími čítacími procesy, kdy doby mezi událostmi mají obecné rozdělení.

Definice. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které nabývají pouze nezáporných hodnot; dále předpokládejme, že $X_1, X_2, \ldots$ mají stejné rozdělení s distribuční funkcí F, kde $F(0) < 1$, a se střední hodnotou μ. Položme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k, \quad n \geq 0.$$

Potom proces náhodných veličin $\{N_t, t \geq 0\}$ takových, že

$$N_t = \sup\{n : S_n \leq t\},$$

se nazývá *proces obnovy*. Jestliže $P(X_0 > 0) > 0$, říkáme, že N_t je *proces obnovy se zpožděním*. Funkce $m(t) = EN_t$ se nazývá *funkce obnovy*.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že předpokládáme $X_1 \geq 0$ s pravděpodobností jedna a $F(0) = P(X_1 = 0) < 1$, je $\mu > 0$.

Náhodná veličina S_n značí čas, kdy dojde k výskytu $(n+1)$−ní události (obnovy), N_t je počet obnov v intervalu $[0, t]$. Je-li $X_0 = S_0 = 0$, považujeme počátek za čas obnovy. Někdy v tomto případě mluvíme o čistém procesu obnovy. Náhodné veličiny $X_1, X_2 \ldots$ jsou doby mezi obnovami.

Příklad 4.1. Typickým příkladem procesu obnovy je proces výměny součástí nějakého zařízení v nepřetržitém provozu; jakmile dojde k poruše, je součást nahrazenou novou součástí stejného druhu. Jestliže původní součást byla nová, je proces výměn popsán čistým procesem obnovy, v případě, že původní součást byla použitá a při dalších výměnách se nahradí vždy novou, mluvíme o procesu obnovy se zpožděním.

Jiným příkladem může být nerozložitelný Markovův řetězec s diskrétním časem a konečnou množinou stavů. Potom počet návratů do stavu j je proces obnovy (čistý, jestliže na počátku byl řetězec v j, a se zpožděním, byl-li na počátku ve stavu $i \neq j$). Doby mezi návraty jsou nezávislé náhodné veličiny (věta 2.5).

Rozdělení počtu obnov odvodíme snadno, když si uvědomíme, že

$$[N_t \leq n] \Longleftrightarrow [S_n > t] \quad n \geq 0. \tag{4.1}$$

Potom

$$P(N_t = n) = P(S_{n-1} \leq t < S_n) \quad n \geq 1.$$

Poznámka. $P(N_t > n) = P(S_n \leq t) = F_n(t)$, kde F_n je distribuční funkce náhodné veličiny S_n. Tuto distribuční funkci můžeme vyjádřit jako konvoluci distribučních funkcí náhodných veličin $X_0, X_1, \ldots, X_n$: Jestliže $S_0 = 0$, je $F_n(t) = F^{n*}(t)$, $n \geq 0$, je-li $S_0 > 0$ a X_0 má distribuční funkci G, je $F_n(t) = G * F^{n*}$, $n \geq 0$, kde F^{n*} je $n-$tá konvoluční mocnina distribuční funkce F (je $F^{0*}(t) = I([0,\infty))(t)$, $F^{1*} = F$, $F^{0*} * G = G$, viz Dodatek A.) Pro další úvahy zavedeme označení

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t). \tag{4.2}$$

Nyní můžeme snadno vypočíst funkci obnovy.

Věta 4.1. *Pro funkci obnovy platí*

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq t) < \infty \qquad \text{pro všechna } 0 \leq t < \infty.$$

Důkaz. Zřejmě N_t je celočíselná náhodná veličina nabývající jen nezáporných hodnot, tedy podle věty A.2 Dodatku A

$$m(t) = EN_t = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t > n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq t).$$

Zbytek věty dokážeme pro zjednodušení a urychlení výkladu jen pro $X_0 = 0$; důkaz však nepřináší žádné potíže pro procesy se zpožděním.

Uvažujme Laplaceovu transformaci distribuční funkce F, t.j.

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)$$

pro $\lambda \geq 0$. Zřejmě $\widehat{F}(\lambda) < \infty$ pro všechna $\lambda > 0$ a dále platí

$$\lim_{\lambda \to \infty} \widehat{F}(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} (F(0) + \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} dF(x)) = F(0).$$

Protože předpokládáme $F(0) < 1$, je $\frac{1}{F(0)} > 1$; uvažujme $1 < \gamma < \frac{1}{F(0)}$ a λ tak velké, že $\gamma \widehat{F}(\lambda) < 1$. Nyní máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty P(S_n \leq t) \leq \sum_{n=0}^\infty \gamma^n P(S_n \leq t) &= \sum_{n=0}^\infty \gamma^n P(e^{-\lambda S_n} \geq e^{-\lambda t}) \\ \leq e^{\lambda t} \sum_{n=0}^\infty \gamma^n E e^{-\lambda S_n} &= e^{\lambda t} \sum_{n=0}^\infty (\gamma \widehat{F}(\lambda))^n < \infty,\end{aligned}$$

když jsme využili nerovnosti

$$P(X \geq a) \leq a^{-1} EX,$$

která platí pro nezápornou náhodnou veličinu X a libovolné $a > 0$, a dále vlastností Laplaceovy transformace (viz Dodatek A.)

□

Poznámka. Pro čistý proces obnovy je $m(t) = U(t)$, pro proces obnovy se zpožděním je $m(t) = (G * U)(t)$.

Příklad 4.2. Uvažujme čistý proces obnovy, ve kterém doby mezi obnovami mají exponenciální rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Víme již, že součet n nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením má Erlangovo rozdělení řádu n s hustotou

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Můžeme tedy vyjádřit F^{n*} pomocí hustoty a pro funkci obnovy dostaneme pro $t \geq 0$

$$m(t) = U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + \sum_{t=1}^{\infty} \int_0^t f_n(x)dx$$
$$= F^{0*}(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = 1 + \lambda t.$$

Věta 4.2. *Nechť $P(X_0 < \infty) = 1$ a $EX_1 = \mu < \infty$. Potom s pravděpodobností jedna*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Důkaz. Využijeme vztahu (4.1) a silného zákona velkých čísel, podle kterého s pravděpodobností jedna

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \cdots + X_n) = \mu.$$

Potom postupujeme podobně jako v důkazu věty 2.27.

□

Věta 4.3. *Nechť $P(X_0 < \infty) = 1$ a nechť doby mezi obnovami $X_1, X_2, \ldots$ mají konečnou střední hodnotu μ a konečný rozptyl σ^2. Potom platí*

$$\lim_{t \to \infty} P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \leq x \right) = \Phi(x),$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Důkaz. Větu dokážeme stejnými úvahami jako větu 2.28.

□

Připomeňme definici markovského času: celočíselná náhodná veličina τ nabývající hodnot z množiny $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ je markovský čas posloupnosti nezávislých náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, jestliže jev $[\tau = n]$ patří do $\sigma-$ algebry generované náhodnými veličinami $X_0, \ldots, X_n$ (nezávisí na veličinách $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$).

Věta 4.4 (Waldova identita). *Nechť $X_1, X_2 \dots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s konečnou střední hodnotou a nechť náhodná veličina N je markovský čas posloupnosti $\{X_n, n \geq 1\}$ takový, že $EN < \infty$. Potom*

$$ES_N = E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = ENEX_1.$$

Důkaz. Platí

$$S_N = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I(N \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n,$$

kde jsme označili $I_n = I(N \geq n)$. Protože N je markovský čas, jev $[N \geq n]$ stejně jako $[N < n]$ závisí jen na veličinách $X_1, \dots, X_{n-1}$, tedy náhodná veličina I_n nezávisí na X_n. Je tedy podle Fubiniovy věty a podle věty A.2 z Dodatku A

$$\begin{aligned} ES_N &= E\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n I_n) = EX_1 \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) = EX_1 \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n) \\ &= EX_1 EN. \end{aligned}$$

□

Uvažujme náhodnou veličinu

$$S_{N_t} = \sum_{j=0}^{N_t} X_j \ ;$$

zřejmě N_t je markovský čas posloupnosti $X_0, X_1, \dots$, neboť

$$[N_t = n] \Longleftrightarrow [X_0 + \cdots + X_{n-1} \leq t < X_0 + \cdots + X_n], \quad n \geq 1$$

a $[N_t = 0]$ nastane jen když $[X_0 > t]$. Je tedy S_{N_t} čas první obnovy po t, zatímco $S_{N_t - 1}$ je čas poslední obnovy v $[0, t]$.

Uvažujme nyní čistý proces obnovy a zastavme ho při první obnově po čase t; jestliže doby mezi návraty mají konečnou střední hodnotu μ, plyne ihned z Waldovy identity, že

$$ES_{N_t} = \mu\, E(N_t) = \mu\, m(t). \tag{4.3}$$

Nyní můžeme vyslovit větu:

Věta 4.5 (Elementární věta obnovy). *Pro funkci obnovy $m(t)$ platí*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\mu < \infty$. Potom z tvrzení věty 4.2 a Fatouova lemmatu máme

$$\frac{1}{\mu} = E \varliminf_{n\to\infty} \frac{N_t}{t} \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{EN_t}{t} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{m(t)}{t}. \tag{4.5}$$

Nyní položme $\widetilde{X}_0 = 0$ a pro $n = 1, 2, \ldots$ definujme náhodné veličiny

$$\widetilde{X}_n = \begin{cases} X_n & X_n \le M, \\ M & X_n > M, \end{cases}$$

kde M je kladná konstanta. Položme $\widetilde{S}_n = \sum_{j=0}^n \widetilde{X}_j$, $\widetilde{N}_t = \sup\{n : \widetilde{S}_n \le t\}$. Protože doby mezi obnovami v procesu $\widetilde{N}_t$ jsou rovny nejvýše M, máme pro čas první obnovy po t v tomto procesu

$$\widetilde{S}_{\widetilde{N}_t} \le t + M,$$

odtud a z (4.3)

$$\mu_M(\widetilde{m}(t)) \le t + M,$$

kde $\mu_M = E\widetilde{X}_1$. Odtud dostáváme

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\widetilde{m}(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M}.$$

Protože $\widetilde{S}_n \le S_n$, je $\widetilde{N}_t \ge N_t$ a také $\widetilde{m}(t) \ge m(t)$, takže

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M}. \tag{4.6}$$

Odtud limitním přechodem pro $M \nearrow \infty$ máme

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu},$$

což spolu s (4.5) dává (4.4).

Je-li $\mu = \infty$, uvažujeme opět useknuté doby $\widetilde{X}_n$; protože nyní $\mu_M \nearrow \infty$ pro $M \nearrow \infty$, dostaneme výsledek limitním přechodem z (4.6).

□

Uvažujme opět proces obnovy $\{N_t, t \geq 0\}$. Předpokládejme, že s každou obnovou je spojen určitý výnos (nebo náklad, ztráta); nechť R_n je výnos získaný v čase S_n. Předpokládejme, že $\{R_n, n \geq 1\}$ tvoří posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin (závislost mezi X_n a R_n se nevylučuje) a nezávislých na R_0. Nechť

$$R(t) = \sum_{n=0}^{N_t-1} R_n, \quad t \geq 0$$

je celkový výnos do času t.

Věta 4.6. *Nechť* $EX_1 = \mu < \infty$, $E|R_1| < \infty$ *a* X_0, R_0 *jsou konečné. Potom platí*

(1) $\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\rho}{\mu}$ *s pravděpodobností jedna,*

(2) $\lim_{t\to\infty} \frac{ER(t)}{t} = \frac{\rho}{\mu}$,

kde $\rho = ER_1$.

Důkaz. Dokážeme jenom (1). Máme

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{N_t-1} R_n}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{N_t-1} R_n}{N_t - 1} \frac{N_t - 1}{t}.$$

Pro $t \to \infty$ také $N_t \to \infty$ a podle zákona velkých čísel pro posloupnost $\{R_n\}$ (Štěpán (1987), věta IV.2.2)

$$\frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} R_n \to \rho$$

s pravděpodobností jedna. Podle věty 4.2 $\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu}$ s pravděpodobností jedna, odkud plyne výsledek. Důkaz (2) lze nalézt např. v Resnick (1992), kap. 3.4.

□

4.2. Rovnice obnovy

Rovnice obnovy je konvoluční rovnice tvaru

$$Z = z + Z * F = z + F * Z, \tag{4.7}$$

t.j.

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)dF(y) = z(t) + \int_0^t F(t-y)dZ(y),$$

kde všechny funkce jsou definovány na $[0, \infty)$ (pro $t < 0$ jsou identicky rovny nule.) Funkce Z je neznámá, z je známá a F je distribuční funkce nezáporné náhodné veličiny.

Příklad 4.3. Uvažujme funkci obnovy $m(t) = U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$. Z vlastností konvoluce plyne

$$U(t) = F^{0*}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}(F*F^{(n-1)*})(t) = F^{0*}(t)+(F*\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*})(t) = F^{0*}(t)+(F*U)(t).$$

Funkce obnovy tedy vyhovuje rovnici obnovy, stačí položit $z = F^{0*}, Z = U$. Podobně bychom postupovali při procesu obnovy se zpožděním.

Opakujeme-li postup v (4.7), vidíme, že funkce F musí splňovat

$$Z = z + Z*F = z + z*F + Z*F^{2*} = \cdots = z + \sum_{n=1}^{n} z * F^{n*} = z * \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}.$$

Dostáváme tedy, že řešení rovnice obnovy je tvaru

$$Z(t) = (z*U)(t) = \int_0^t z(t-y)dU(y), \tag{4.8}$$

kde $U(t)$ je dána vzorcem (4.2).

Je-li z *lokálně omezená*, t. j. platí-li $\sup_{0\le t\le T} |z(t)| < \infty \ \forall\ T > 0$, je (4.8) jediné lokálně omezené řešení rovnice (4.7) (Resnick (1992), kap.3.5.)

Pomocí rovnice obnovy a jejího řešení můžeme určit důležité charakteristiky procesu obnovy.

Příklad 4.4. Uvažujme tzv. *rekurenční dobu*

$$B(t) = S_{N_t} - t,$$

t. j. dobu mezi t a časem do následující obnovy (zbytková doba života). Hledejme rozdělení $B(t)$ v čistém procesu obnovy. Ukážeme, že pro $P(B(t) > x)$ platí rovnice (4.7). Pro $x > 0$ máme

$$P(B(t) > x) = P(B(t) > x,\ X_1 > t) + P(B(t) > x,\ X_1 \le t).$$

Je-li $X_1 > t$, je $N_t = 1$, tedy

$$P(B(t) > x,\ X_1 > t) = P(X_1 > t + x) = 1 - F(t + x).$$

Dále máme

$$
\begin{aligned}
P(B(t) > x,\ X_1 \le t) &= P(S_{N_t} - t > x,\ N_t \ge 2) = \sum_{n=2}^{\infty} P(S_n - t > x,\ N_t = n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(S_n - t > x,\ S_{n-1} \le t < S_n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P(S_n - t > x,\ S_{n-1} \le t < S_n | X_1 = y) dF(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P(y + S_{n-1} - t > x,\ y + S_{n-2} \le t < y + S_{n-1}) dF(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P(S_{n-1} - (t - y) > x,\ S_{n-2} \le t - y < S_{n-1}) dF(y)
\end{aligned}
$$

a odtud po kratší úpravě dostaneme

$$P(B(t) > x,\ X_1 \le t) = \int_0^t P(B(t-y) > x) dF(y).$$

Celkem tedy máme

$$P(B(t) > x) = 1 - F(t + x) + \int_0^t P(B(t-y) > x) dF(y),$$

což je rovnice obnovy (4.7), ve které $Z(t) = P(B(t) > x), z(t) = 1 - F(t + x)$ pro pevné x. Řešením této rovnice dostaneme podle (4.8)

$$P(B(t) > x) = \int_0^t (1 - F(t + x - y)) dU(y).$$

4.3. Cvičení a doplňky

Cvičení 4.1. Nechť $\{N_t, t \ge 0\}$ je čistý proces obnovy, ve kterém doby mezi obnovami mají exponenciální rozdělení s parametrem λ. Potom $\{\widetilde{N}_t, t \ge 0\}$, kde $\widetilde{N}_t = N_t - N_0$, je Poissonův proces s intenzitou λ. Je tudíž $m(t) = EN_t = \lambda t + 1$ (srovnejte s výsledkem příkladu 4.2). Dokažte, že pro rozdělení rekurenční doby $B(t)$ platí

$$P(B(t) > x) = e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$

($B(t)$ má exponenciální rozdělení pro každé t).

Cvičení 4.2. *Zpětná rekurenční doba* $A(t)$ je doba mezi poslední obnovou a časem t definovaná předpisem

$$A(t) = t - S_{N_t - 1}, \quad t \geq S_0.$$

Užijte stejného postupu jako v příkladu 4.4 a dokažte, že v čistém procesu obnovy rozdělení $A(t)$ vyhovuje rovnici obnovy

$$P(A(t) \leq x) = (1 - F(t))I([0, \infty))(x) + \int_0^t P(A(t-y) \leq x) dF(y).$$

Je-li F distribuční funkce exponenciálního rozdělení, ukažte, že

$$P(A(t) \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & t \geq x \\ 1 & t < x. \end{cases}$$

5. LITERATURA

1. Doob, J. (1953): *Stochastic Processes*, Wiley, New York.

2. Dupač, V. a Dupačová, J. (1975): *Markovovy procesy I*, Universita Karlova, Praha.

3. Dupač, V. a Dupačová, J. (1980): *Markovovy procesy II*, Universita Karlova, Praha.

4. Feller, W. (1964): *An Introduction to Probability Theory and its Application (ruský překlad)*, Mir, Moskva.

5. Gichman, I. I., a Skorochod, A. V. (1973): *Teorija slučajnych processov II*, Nauka, Moskva.

6. Chung, K. L. (1967): *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, Springer Verlag, New York.

7. Karlin, S. a Taylor, H. M. (1981): *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

8. Norris, J. R. (1997): *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge.

9. Resnick, S. (1992): *Adventures od Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston.

10. Štěpán, J. (1987): *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha.

DODATEK A

1. *Vytvořující funkce celočíselných náhodných veličin*

Definice. Nechť $\{a_n\} = \{a_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže mocninná řada $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konverguje pro $|s| < s_0$ pro nějaké $s_0 > 0$, potom $A(s)$ nazveme *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{a_n\}$.

Připomeňme základní vlastnosti mocninných řad:

(i) Ke každé řadě typu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ existuje takové číslo $0 \le R \le \infty$, že pro $|s| < R$ tato řada konverguje a to absolutně; pro $|s| > R$ řada diverguje. Číslo R se nazývá poloměr konvergence a platí

$$R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

(ii) Má-li řada $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ poloměr konvergence R, má i řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ poloměr konvergence R a pro $|s| < R$ platí

$$\frac{d}{ds}A(s) = A'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}.$$

Dalším derivováním dostaneme pro $|s| < R$

$$A^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n s^{n-k}.$$

Pro koeficienty a_n platí

$$a_n = A^{(n)}(0)/n!, \quad n = 0, 1, \dots$$

(iii) *Abelova věta.* Nechť řada $A(s)$ konverguje v poloměru $R = 1$. Potom platí :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a < \infty \Rightarrow \lim_{s\to 1-} A(s) = a;$$

je-li $a_n \ge 0 \quad \forall n \ge 0$, potom

$$\lim_{s\to 1-} A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \le \infty.$$

(iv) *Tauberova věta.* Nechť řada $A(s)$ konverguje v poloměru $R = 1$. Předpokládejme, že $a_n \ge 0 \quad \forall n \ge 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a < \infty \Leftrightarrow \lim_{s\to 1-} (1-s)A(s) = a.$$

Limity $A(s), A'(s), A^{(k)}(s)$ pro $s \to 1$ zleva budeme nadále pro zjednodušení označovat jako $A(1), A'(1), A^{(k)}(1)$.

Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina s rozdělením $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Vytvořující funkci posloupnosti $\{p_n\}$ nazýváme *vytvořující funkcí náhodné veličiny* X, značíme $P(s)$, nebo přesněji $P_X(s)$. Platí $P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \leq 1$, přičemž $P_X(1) = 1$ tehdy a jen tehdy, když $P[X < \infty] = 1$ (říkáme, že X je vlastní náhodná veličina). Poloměr konvergence $P_X(s)$ je tedy nejméně 1.

Věta A.1. *Pro momenty (vlastní) náhodné veličiny X platí*

$$EX = P'_X(1),$$

$$EX(X-1)\dots(X-k+1) = P_X^{(k)}(1),$$

$$\text{var}\, X = P''_X(1) + P'_X(1) - (P'_X(1))^2 \ \textit{(je-li } P'_X(1) < \infty\textit{)}.$$

Důkaz. Pro $0 < s < 1$ máme

$$P'_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n s^{n-1} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} np_n s^n = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} np_n s^n$$

a podle Abelovy věty aplikované na posloupnost $\{np_n\}$

$$\lim_{s\to 1-} P'_X(s) = P'_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = EX.$$

Obdobně dostaneme

$$\lim_{s\to 1-} P_X^{(k)}(s) = P_X^{(k)}(1) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)p_n = \mu^{[k]},$$

kde $\mu^{[k]} = EX(X-1)\dots(X-k+1)$ je k-tý faktoriální moment X.

□

Příklad. Vytvořující funkce Poissonova rozdělení s parametrem λ je

$$P_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} s^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Odtud $P'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$, $P''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}, \dots, P_X^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda(s-1)}$. Tudíž $EX = \lambda$, $\mu^{[k]} = \lambda^k$, $\text{var}\, X = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Věta A.2. *Nechť $P_X(1) = 1$. Pro $n = 0, 1, \dots$ položme*

$$q_n = P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j.$$

Nechť $Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{q_n\}$. Potom

$$Q(s) = \frac{1 - P_X(s)}{1 - s}, \quad |s| < 1. \tag{1}$$

Pro momenty náhodné veličiny X platí

$$EX = Q(1), \qquad \operatorname{var} X = 2Q'(1) + Q(1) - Q^2(1).$$

Důkaz. Koeficient u členu s^n v rozvoji $(1 - s)Q(s)$ je $q_n - q_{n-1} = -p_n$, $n \geq 1$ a $q_0 = 1 - p_0$. Tedy

$$(1 - s)Q(s) = 1 - p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n = 1 - P_X(s). \tag{2}$$

Odtud plyne (1).

Nyní dokažme tvrzení $EX = Q(1)$. Vztah (2) platí pro každé $|s| < R$, kde R je poloměr konvergence řady $P_X(s)$; derivováním dostáváme $P_X'(s) = Q(s) - (1 - s)Q'(s)$. Je-li $R > 1$, dosadíme $s = 1$. Je-li $R = 1$ a $EX < \infty$, máme

$$nq_n = n \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kp_k \to 0 \text{ pro } n \to \infty$$

a tedy i $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} kq_k \to 0$. Podle Tauberovy věty $(1 - s)Q'(s) \to 0$ pro $s \to 1-$, tedy $P_X'(1) = Q(1)$. Je-li $R = 1$ a $EX = +\infty$, potom tvrzení plyne ze vztahu $P_X'(s) \leq Q(s)$ pro $0 < s < 1$ a z limitního přechodu v této nerovnosti pro $s \to 1-$. Vztah pro rozptyl se dokáže analogicky.

$\square$

2. Konvoluce

Definice. Nechť $\{a_n, n \in \mathbb{N}_0\}, \{b_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Definujme posloupnost $\{c_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ předpisem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n \geq 0.$$

Posloupnost $\{c_n\}$ se nazývá *konvoluce* posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$, značíme $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$.

Věta A.3. *Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou reálné posloupnosti s vytvořujícími funkcemi A, B. Potom vytvořující funkce C jejich konvoluce $\{c_n\}$ je dána výrazem*

$$C(s) = A(s)B(s).$$

Důkaz. Plyne z násobení mocninných řad $A(s)$ a $B(s)$ a porovnáním koeficientů u stejných mocnin s.

□

Snadno lze ukázat, že operace konvoluce je asociativní a komutativní. Posloupnost $\{a_n\} * \{a_n\}$ se nazývá *druhá konvoluční mocnina* posloupnosti $\{a_n\}$. Budeme ji značit $\{a_n\}^{2*}$. Podobně definujeme *k-tou konvoluční mocninu* předpisem $\{a_n\}^{k*} = \{a_n\}^{(k-1)*} * \{a_n\}$. Definujme $\{a_n\}^{0*} = \{1, 0, 0, \ldots\}$; potom $\{a_n\}^{1*} = \{a_n\}$. Je-li $A(s)$ vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}$, je $A^k(s)$ vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}^{k*}$.

Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny s rozdělením $\{p_n^{(1)}\}, \{p_n^{(2)}\}$. Nechť $S = X_1 + X_2$. Potom rozdělení náhodné veličiny S je $\{p_k\}$, kde

$$p_k = P(S = k) = \sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j)P(X_2 = k - j).$$

Tedy $\{p_n\} = \{p_n^{(1)}\} * \{p_n^{(2)}\}$ a pro vytvořující funkce platí

$$P_S(s) = P_{X_1}(s)P_{X_2}(s).$$

Speciálně, jsou-li náhodné veličiny X_1, X_2 stejně rozdělené s rozdělením $\{a_n\}$, je rozdělení jejich součtu druhou konvoluční mocninou posloupnosti $\{a_n\}$. Toto tvrzení lze indukcí rozšířit na součet libovolného konečného součtu nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin.

Definice. Nechť F je distribuční funkce nezáporné náhodné veličiny, t.j. $F(x) = 0, x < 0$ a nechť G je funkce definovaná na $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, která je lokálně omezená, t.j. omezená na každém konečném intervalu. *Konvoluce funkcí F, G* se definuje jako

$$(F * G)(t) = \int_0^t G(t - x)dF(x), \quad t \geq 0.$$

Věta A.4. *Platí $F * G \geq 0$, je-li G nezáporná, a $F * G$ je lokálně omezená.*

Důkaz. Nezápornost je zřejmá, dále je pro každé $0 \leq s \leq t$

$$|(F * G)(s)| \leq \int_0^t |G(s - x)dF(x)| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| \int_0^s dF(s) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| F(t) < \infty.$$

□

Funkce $F * F$ se nazývá *druhá konvoluční mocnina funkce F*, značíme F^{2*}. Definujme obecnou konvoluční mocninu předpisem

$$\begin{aligned}
F^{0*}(x) &= I([0, \infty))(x) \\
F^{1*}(x) &= F(x) \\
F^{(n+1)*}(x) &= (F^{n*} * F)(x), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Věta A.5. *Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, které nabývají jen nezáporných hodnot. Jestliže X_1 má distribuční funkci F_1 a X_2 distribuční funkci F_2, potom $X_1 + X_2$ má distribuční funkci $F_1 * F_2$.*

Důkaz. Pro $t \geq 0$ je

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq t) &= \int\int_{0 \leq x+y \leq t} dF_1(x)dF_2(y) \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{t-x} dF_2(y) \right) dF_1(x) = \int_0^t F_2(t - x)dF_1(x).
\end{aligned}$$

□

Z důkazu věty A.5 je vidět, že $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$. Jsou-li X_1, X_2 stejně rozdělené s distribuční funkcí F, potom $X_1 + X_2$ má distribuční funkci F^{2*}. Indukcí lze rozšířit na libovolný konečný součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin.

3. Laplaceova transformace

Nechť X je nezáporná náhodná veličina s distribuční funkcí F. Potom Laplaceova transformace distribuční funkce F je

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = Ee^{-\lambda X}, \quad \lambda \geq 0.$$

Zřejmě $\widehat{F}(\lambda) < \infty$ pro všechna $\lambda \geq 0$.

Věta A.6. *Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s distribučními funkcemi F_1, F_2. Potom*

$$(\widehat{F_1 * F_2})(\lambda) = \widehat{F}_1(\lambda)\widehat{F}_2(\lambda).$$

Jsou-li X_1, X_2 stejně rozdělené, potom

$$(\widehat{F * F})(\lambda) = \widehat{F^{*2}}(\lambda) = \left(\widehat{F}(\lambda)\right)^2.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z nezávislosti náhodných veličin a z vlastností střední hodnoty. □

Indukcí lze rozšířit tuto vlastnost na n nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin.

4. Náhodný součet náhodných veličin

Nechť $N, X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny, nechť N má rozdělení $\{\pi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ a nechť všechny náhodné veličiny X_i mají stejné rozdělení $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Položme $S_0 = 0, S_N = X_1 + \cdots + X_N, N \geq 1$. Rozdělení S_N označme $\{h_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Věta A.7. *Nechť N má vytvořující funkci Π, nechť X_i mají vytvořující funkci P. Potom platí $H(s) = \Pi(P(s))$ a dále*

$$ES_N = ENEX_1,$$

$$\operatorname{var} S_N = (EN)(\operatorname{var} X_1) + (\operatorname{var} N)(EX_1)^2,$$

kde H je vytvořující funkce náhodné veličiny S.

Důkaz. Podle věty o celkové pravděpodobnosti a vzhledem k předpokladu nezávislosti

$$\begin{aligned} h_k = P(S_N = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_N = k | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = k | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = k) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{n*} \pi_n, \end{aligned}$$

kde p_k^{n*} je k-tý prvek posloupnosti $\{p_k\}^{n*}$. Tedy

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{n*} \pi_n s^k = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n P^n(s) = \Pi(P(s)).$$

Pro střední hodnotu S_N dostáváme

$$ES_N = H'(1) = \Pi'(P(1))P'(1) = \Pi'(1)P'(1) = ENEX_1,$$

vzorec pro rozptyl dostaneme analogicky z věty A.1.

□

DODATEK B

1. Některé věty o maticích

Definice. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ je mocninná řada v $\mathbb{C}$ a nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu k. Potom řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \boldsymbol{A}^n = a_0 \boldsymbol{I} + a_1 \boldsymbol{A} + a_2 \boldsymbol{A}^2 + \dots$$

se nazývá *mocninná řada* matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže posloupnost jejích částečných součtů

$$\boldsymbol{S}_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \boldsymbol{A}^n$$

konverguje k nějaké matici $\boldsymbol{S}$ (v tom smyslu, že konvergují odpovídající prvky příslušných matic), řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \boldsymbol{A}^n$ konverguje a má součet $\boldsymbol{S}$.

Věta B.1. *Má-li mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$ *a všechna vlastní čísla matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou v absolutní hodnotě menší než* R, *konverguje i mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \boldsymbol{A}^n$.

Důkaz. Gantmacher (1966), kap. V, § 4, str. 117.

Věta B.2. *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice taková, že* $\boldsymbol{A}^n \to \boldsymbol{0}$ *při* $n \to \infty$, *kde* $\boldsymbol{0}$ *je nulová matice. Potom matice* $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ *je regulární a platí*

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k. \tag{B.1}$$

Důkaz. Pro každé $n \geq 1$ platí

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{n-1}).$$

Dále z předpokladu věty plyne, že $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n \to \boldsymbol{I}$ při $n \to \infty$, a protože determinant je spojitou funkcí prvků matice, platí také $|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n| \to |\boldsymbol{I}|$. Existuje tedy n_0 přirozené tak, že $|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{n_0}| \neq 0$. Potom ale

$$|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{n_0}| = |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{n_0-1}| \neq 0,$$

odkud plyne, že matice $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ je regulární a existuje k ní matice inverzní. Platí tedy pro každé $n \geq 1$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{n-1},$$

odkud limitním přechodem dostaneme

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k.$$

□

Definice. Říkáme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je *rozložitelná*, jestliže ji lze (po eventuální permutaci řádků a sloupců) psát ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{0}$ je nulová matice a $\boldsymbol{A}_1$ a $\boldsymbol{A}_3$ jsou čtvercové matice. V opačném případě je $\boldsymbol{A}$ *nerozložitelná*.

Věta B.3 (Perron–Frobenius). *Nechť $\boldsymbol{A}$ je nerozložitelná čtvercová stochastická matice. Pak jsou všechna vlastní čísla $\boldsymbol{A}$ v absolutní hodnotě menší než 1. Číslo 1 je jednoduché vlastní číslo $\boldsymbol{A}$ a příslušný vlastní vektor lze volit tak, že má všechny složky kladné.*

Důkaz. Gantmacher (1966), kap. XIII, § 2, str. 354-355.

Věta B.4. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice s prvky a_{ij} taková, že $a_{ii} \leq 0, a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$ a všechny řádkové součty jsou rovny 0. Pak 0 je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ s vlastním vektorem $(1, \ldots, 1)^T$ a pro všechna ostatní vlastní čísla λ matice $\boldsymbol{A}$ platí, že $Re\, \lambda < 0$.*

Důkaz. Dupač, Dupačová II (1980), str.43.

Definice. Pro čtvercovou matici $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}, 1 \leq i, j \leq k\}$ definujeme *adjungovanou matici* $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \{b_{ij}, 1 \leq i, j \leq k\}$ předpisem

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det\{a_{rs}, 1 \leq r, s \leq k, r \neq j, s \neq i\}. \tag{B.2}$$

Věta B.5. *Pro čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ platí*

$$\boldsymbol{A} \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A}) \boldsymbol{I},$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice.

Důkaz. Plyne z vlastností inverzní matice.

Definice. Nechť $0 < R \leq \infty$. Pro holomorfní funkci $f : \mathcal{U}(0, R) \to \mathbb{C}$ na okolí $\mathcal{U}(0, R)$, t.j. mající na $\mathcal{U}(0, R)$ derivace všech řádů, definujeme rozšíření na všechny čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, jejichž vlastní čísla jsou v absolutní hodnotě menší než R, předpisem

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \boldsymbol{A}^k .$$

Věta B.6 (Perronův vzorec). *Nechť $f : \mathcal{U}(0, R) \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce na okolí $\mathcal{U}(0, R)$ pro nějaké $0 < R \leq \infty$. Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice, jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s násobnostmi $m_1, \ldots, m_k$. Když $|\lambda_j| < R$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, k$, pak platí*

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{d^{m_j-1}}{d\lambda^{m_j-1}} \left[\frac{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}{\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} f(\lambda) \; adj\, (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \right] \Bigg|_{\lambda = \lambda_j} . \tag{B.3}$$

Důkaz. Gantmacher (1966), kap. V, § 3, str. 113.

Speciální případy Perronova vzorce:

$$\boldsymbol{A}^n = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{d^{m_j-1}}{d\lambda^{m_j-1}} \left[\frac{\text{adj } (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{\psi_j(\lambda)} \lambda^n \right] \Bigg|_{\lambda = \lambda_j} .$$

$$e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{d^{m_j-1}}{d\lambda^{m_j-1}} \left[\frac{\text{adj } (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{\psi_j(\lambda)} e^{\lambda} \right] \Bigg|_{\lambda = \lambda_j} ,$$

kde jsme označili

$$\psi_j(\lambda) = \frac{\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}} .$$

Jsou-li všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ jednoduchá, lze vzorec (B.3) psát v jednodušším tvaru

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{K} \frac{\text{adj } (\lambda_j \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{\psi_j(\lambda_j)} f(\lambda_j) , \tag{B.4}$$

kde K je řád matice.

2. Parciální diferenciální rovnice

Definice. Obyčejnou diferenciální rovnicí n–tého řádu rozumíme rovnici

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{B.5}$$

nebo, je-li řešena vzhledem k nejvyšší derivaci, rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{B.6}$$

Řešením této rovnice (nebo integrálem) nazveme každou funkci $y = g(x)$, která má (v uvažovaném oboru) derivace do n–tého řádu včetně a vyhovuje identicky rovnici (B.5). Řešení se často udává implicitně ve tvaru $\phi(x, y) = c$, kde c je konstanta.

Definice. Parciální diferenciální rovnice je vztah mezi neznámou funkcí $z(x_1, \dots, x_n)$ proměnných $x_1, \dots, x_n, n \geq 2$ a jejími derivacemi

$$F\left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^k}, \dots\right) = 0. \tag{B.7}$$

Derivace ve vzorci (B.7) mohou být obecně i smíšené. Řádem této rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Řešením (integrálem) rovnice nazveme každou funkci $z(x_1, \dots, x_n)$, která má příslušný počet derivací a vyhovuje rovnici (B.7) v každém bodě $x_1, \dots, x_n$.

Definice. Homogenní lineární parciální diferenciální rovnicí prvního řádu ve dvou proměnných x, y rozumíme rovnici

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{B.8}$$

kde a, b jsou spojité funkce ve vyšetřovaném oboru a nejsou v něm nikde zároveň rovny nule.

Věta B.7. *Nechť $\psi(x, y) = c$ je první integrál rovnice*

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}.$$

Potom řešení rovnice (B.8) je

$$z = F(\psi(x, y)),$$

kde F je libovolná diferencovatelná funkce.

(Rektorys (1995), II. díl, odst. 18.2, věta 1 (bez důkazu).)

Definice. Nehomogenní lineární parciální diferenciální rovnicí prvního řádu ve dvou proměnných x, y rozumíme rovnici

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial y}{\partial z} = R(x, y, z). \tag{B.9}$$

O funkcích P, Q, R se předpokládá, že jsou spojité ve vyšetřovaném oboru, P, Q nejsou v tomto oboru zároveň nikde rovny nule a $R \not\equiv 0$.

Věta B.8. *Nechť $\phi(x,y,z) = c_1$ a $\psi(x,y,z) = c_2$ jsou dva nezávislé první integrály soustavy rovnic*

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Potom řešení rovnice (B.9) je dáno v implicitním tvaru vztahem

$$F(\phi(x,y,z), \psi(x,y,z)) = 0,$$

kde F je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných.

(Rektorys (1995), II. díl, odst. 18.2, věta 2 (bez důkazu).)

3. Doplňková literatura

1. Gantmacher, F. R. (1966): *Teorija matric,* Nauka, Moskva
2. Rektorys, K. a kol. (1995): *Přehled užité matematiky II,* Prometheus, Praha

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.
RNDr. Petr Lachout, CSc.

Lektorovali: doc. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum, Praha 1, Ovocný trh 3
jako učební text pro posluchače Matematicko-fyzikální fakulty UK
Praha 2001
Dáno do tisku: říjen 2001
Vytiskla tiskárna Nakladatelství Karolinum
AA 6,38 - VA 6,92 - Dotisk 1. vydání - Náklad 100 výtisků
382-141-01 17/99
Cena Kč 130,-
Publikace neprošla jazykovou ani redakční úpravou nakladatelství
ISBN 80-7184-688-0