Kombinatorika a grafy I

látka z

II. semestru informatiky MFF UK
podle přednášek Ondřeje Pangráce

Zpracoval:

Jan „Zaantar“ Štětina

Obsah

(přednáška 1, 23.2.09)

Asymptotická notace

Def: Mějme $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, pak:

(1) $f \in O(g) \Leftrightarrow \exists c \geq 0, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$, tedy existuje $c \geq 0$ takové, že od nějakého n_0 pro všechna n platí $f(n) \leq c \cdot g(n)$, anebo také:

$$\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty .$$

(2) $f \in o(g) \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

(3) $f \in \Omega(g) \Leftrightarrow g \in O(f)$

(4) $f \in \omega(g) \Leftrightarrow g \in o(f)$

(5) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in (O(g) \cap \Omega(g))$

Píšeme také $f = O(g)$, ale ne $O(g) = f$.

Odhad faktoriálu

Úvod: Faktoriál $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
Pro $n \geq 4$ je $2^n \leq n! \leq n^n$ (důkaz m.i.).
Platí $\forall c \in \mathbb{R}_+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0 :\ c^n \leq n!$ (*hrubý* odhad zespoda).

Tvrz.: $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Důkaz: *BÚNO* uvažme n sudé.

Dolní odhad:
Spárujeme „od konců“ $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$,
vidíme, že pro $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ je $k \cdot (n-k) \geq n$.
Tedy platí $\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} k \cdot (n-k) \geq n^{\frac{n}{2}}$.

Horní odhad:
Analogicky, použijeme AG-nerovnost ($\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$)pro $k \cdot (n-k+1)$
$\sqrt{k \cdot (n-k+2)} \leq \frac{k+n-k+1}{2} = \frac{n+1}{2}$
$k \cdot (n-k+1) \leq (\frac{n+1}{2})^2$ a tedy $\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} k \cdot (n-k+1) \leq (\frac{n+1}{2})^n$. Q.E.D.

Věta: Mějme $n \in \mathbb{N}$, pak $e \cdot (\frac{n}{e})^n \leq n! \leq n \cdot e \cdot (\frac{n}{e})^n$.

Důkaz: Vezmeme $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n$

Dolní odhad:
$\ln n! \leq \int_1^{n+1} n \cdot x \cdot dx = [x \cdot \ln x - x]_1^{n+1}$
Takže platí $\ln n! \leq (n+1) \cdot \ln(n+1) - (n+1) + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n! \leq e^{(n+1) \cdot \ln(n+1) - n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$
$n! = n \cdot (n-1)! \leq n \cdot (\frac{n^n}{e^{n-1}}) = n \cdot e \cdot (\frac{n}{e})^n$.

Horní odhad:
Platí $\int_2^{n+1} \ln(x-1) \cdot dx \leq \ln n!$, což se rovná:
$\int_1^n \ln x \cdot dx = [x \cdot \ln x - x]_1^n = n \cdot \ln n - n + 1$
a tedy $n! \geq e^{n \cdot \ln n - n + 1} = \frac{n^n}{e^n} \cdot e = e \cdot (\frac{n}{e})^n$, Q.E.D.

Odhady binomických koeficientů

Úvod: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$, tedy BÚNO můžeme počítat s $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

☼: $0 \leq k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2} \Rightarrow \binom{n}{k_1} < \binom{n}{k_2}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{n^k}{k!}$$

Věta: Pro $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ je $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$.

Důkaz: Dokážeme silnější tvrzení, že $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$.

Víme, že $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i = (1+x)^n$ a také $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i \geq \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot x^i$.

$$\frac{1}{x^k} \cdot (1+x)^n \geq \frac{1}{x^k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \frac{1}{x^{k-i}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{vždy} > 1}{}^{k-i} > \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$$

Tedy $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k} \underbrace{\leq}_{(1+x) \leq e^x} \frac{(e^x)^n}{x^k} \underbrace{=}_{\text{volme } x = \frac{k}{n}} \frac{(e^{\frac{k}{n}})^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k} = \frac{e^k \cdot n^k}{k^k} = \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$. Q.E.D.

Největší kombinační číslo

Úvod: *BÚNO* uvažujme *n* sudé.

$$\underbrace{\left(\frac{n}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}}}_{=2^{\frac{n}{2}}} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \underbrace{\left(\frac{e \cdot n}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}}}_{=(2 \cdot e)^{\frac{n}{2}}} \quad \ldots \qquad \frac{2^n}{\underbrace{n+1}_{\text{průměr}}} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^n$$

Věta: Pro $m \geq 1$ platí $\frac{2^{2 \cdot m}}{2 \cdot \sqrt{m}} \leq \binom{2 \cdot m}{m} \leq \frac{2^{2 \cdot m}}{\sqrt{2 \cdot m}}$ (odlišnost o konstantu!)

Důkaz:

Definujeme $P_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot m - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot m)}$, chceme $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{m}} \leq P_m \leq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot m}}$.

Rozšíříme $P_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot m - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot m)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot m)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot m)} = \frac{(2 \cdot m)!}{2^{2 \cdot m} \cdot (m!)^2} = \frac{1}{2^{2 \cdot m}} \cdot \binom{2 \cdot m}{m}$.

Horní odhad:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)}_{<1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)}_{<1} \cdot \underbrace{\ldots}_{<1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(2 \cdot m)^2}\right)}_{<1} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot \ldots}{\ldots} \cdot \ldots \cdot \frac{(2 \cdot m - 1) \cdot (2 \cdot m + 1)}{(2 \cdot m)^2} = P_m^2 \cdot (2 \cdot m + 1) < 1$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1) \cdot (k+1)}{k^2} \Rightarrow P_m < \sqrt{\frac{1}{2 \cdot m + 1}} < \frac{1}{\sqrt{2 \cdot m}}$$

Dolní odhad:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)}_{<1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)}_{<1} \cdot \underbrace{\ldots}_{<1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(2 \cdot m - 1)^2}\right)}_{<1} = \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdot \frac{6 \cdot \ldots}{\ldots} \cdot \ldots \cdot \frac{(2 \cdot m - 2) \cdot (2 \cdot m)}{(2 \cdot m - 1)^2} = \frac{1}{P_m^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot m} < 1$$

$$1 < P_m^2 \cdot 4 \cdot m \Rightarrow P_m < \frac{1}{\sqrt{4 \cdot m}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{m}}$$, Q.E.D.

(přednáška 1, 23.2.09)

Částečně uspořádané množiny

Def: **Částečně uspořádaná množina** (ČUM) je $(X, \leq)$, kde
X je neprázdná množina a
$\leq$ je relace, která je reflexivní,
antisymetrická a
tranzitivní.

Př.: Hasseho diagramy
$(\{1, \ldots, 10\}, \text{dělitelnost})$

Def.: Mějme částečně uspořádanou množinu $(X, \leq)$,
pak $a \in X$ je
- **minimální**, pokud pro všechna $x \in X$ platí $x \leq a \Rightarrow x = a$,
- **nejmenší**, ... $a \leq x$,
- **maximální**, ... $a \leq x \Rightarrow x = a$ a
- **největší**, ... $x \leq a$.

Def.: $f : X \to X'$, kde $(X, \leq), (X', \leq')$ jsou dvě částečně uspořádané množiny, je **vnoření**, pokud
(1) f je prosté
(2) pro všechna $x, y \in X$ platí $x \leq y$, právě když $f(x) \leq' f(y)$.

Pozn.: $(X, \leq)$ je lineární $\Leftrightarrow$ pro všechna $x, y \in X$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$.

Věta: Nechť $(X, \leq)$ je ČUM,
potom existuje její vnoření do $(2^X, \subseteq)$.

Důkaz: Chceme vnoření $f: X \to 2^X$, položíme $f(x) = \{y; y \in X, y \leq x\}$

(1) předpokládejme $f(x) = f(y)$.
Pak platí $x \leq x \Rightarrow x \in f(x)$,
$x \in f(x) \Rightarrow x \in f(y) \Rightarrow x \leq y$.
Analogicky $y \in f(x), y \in f(x) \Rightarrow y \leq x$.
$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$, tedy *f* je prosté.

(2) $\Rightarrow$ předpokládejme $x \leq y$.
Pak pro všechna $z \in X$ platí
$z \in f(x) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z \leq y \Rightarrow z \in f(y) \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$.
$\Leftarrow$ nechť $f(x) \subseteq f(y)$.
Pak pro všechna $z \in X$ platí $z \leq x \Rightarrow z \in f(x) \Rightarrow z \in f(y) \Rightarrow z \leq y$.
Položíme $z := x$ a pak $x \leq y$. Q.E.D.

Def.: $R \subseteq X$ je **řetězec**, pokud pro všechna $r_1, r_2 \in R$ platí $r_1 \leq r_2 \vee r_2 \leq r_1$.
$A \subseteq X$ je **antiřetězec**, pokud pro všechna $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ platí $\neg(a_1 \leq a_2) \wedge \neg(a_2 \leq a_1)$.

Def.: **Délka** je $\omega(X, \leq) = max\{|R|; R$ řetězec v $(X, \leq)\}$.
Šířka je $\alpha(X, \leq) = max\{|A|; A$ antiřetězec v $(X, \leq)\}$.

Věta: **O dlouhém a širokém**
Mějme $(X, \leq)$ ČUM,
$|X| = n$.
Potom $\omega(X, \leq) \cdot \alpha(X, \leq) \geq n$.

Důkaz:
Označíme $X_1 = \{x \in X; x$ minimální v $(X, \leq)\}$.
X_l (předpokládejme, že máme definováno $X_1, \ldots, X_l$).
Položme $X'_l = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{l} X_i)$.
(pokud $X'_l = \emptyset$, iteraci ukončíme a položíme $t := l$)
$X_{l+1} = \{x \in X'_l; x$ minimální v $(X'_l, \leq)\}$.
Získáme $X_1, \ldots, X_t$, zjevně antiřetězce.
(1) Pro $i = 1 \ldots t$ platí $|X_i| \leq \alpha(X, \leq)$
(2) $X_1, \ldots, X_t$ tvoří rozklad *X*.
(3) $t \leq \omega(X, \leq)$:

Mějme *R* řetězec. Nechť $x, y \in R, x, y \in X, x \neq y$.
Pak $x \leq y \vee y \leq x$, *SPOR*.
Dokážeme $t = \omega(X, \leq)$.
Volme x_t libovolný v X_t.
Pak máme $x_{k+1} \leq \ldots \leq x_t$, kde $x_i \in X_i$ a tedy $x_{k+1} \notin X_k$.
Z toho plyne, že existuje $x_k \in X_k$ takové, že $x_k \leq x_k + 1 \leq \ldots \leq x_t$.
Takto lze postupovat až do x_1, tedy $x_1 \leq \ldots \leq x_t$.
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} |X_i| \leq \sum_{i=1}^{t} \alpha(X, \leq) = t \cdot \alpha(X, \leq) = \omega(X, \leq) \cdot \alpha(X, \leq)$. Q.E.D.

Věta: **Erdös-Szekresova** (opakování)
Libovolná posloupnost n^2+1 různých čísel obsahuje monotónní podposloupnost délky $n+1$.

Důkaz: Máme $x_1, \ldots, x_{n^2+1}$, $X = \{1, \ldots, n^2+1\}$.
Definujeme $i \blacktriangleleft j \Rightarrow (i \leq j \wedge x_i \leq x_j)$.
Toto je částečné uspořádání.
Víme, že $\alpha \cdot \omega \geq n^2+1 \Rightarrow$ $\alpha \geq n^2+1$ … klesající podposloupnost
nebo $\omega \geq n^2+1$ … rostoucí podposloupnost. Q.E.D.

Věta: **Spernerova**

$$\alpha(\mathrm{B}_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Důkaz:
Pozn.: $\omega(\mathrm{B}_n) = n+1$
$\alpha(\mathrm{B}_n) \geq \frac{2^n}{n+1}$
Mějme $0 \leq k \leq n$,
pak $A = \binom{\{1, \ldots, n\}}{k}$ je antiřetězec v B_n a
platí $\alpha(\mathrm{B}_n) \geq \binom{n}{k}$ a $\alpha(\mathrm{B}_n) \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.
Stačí nám tedy už jen dokázat, že $\alpha(\mathrm{B}_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.
Vezměme *A* libovolný antiřetězec, chceme $A \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.
Položme $\mathrm{R} :=$ množina všech maximálních řetězců.
$R \in \mathrm{R}$ je tvořena $\emptyset, \{x_{\pi(1)}\}, \{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}\}, \ldots$ a $|\mathrm{R}| = n!$.
Víme $|A \cap R| \leq 1$.

Počítejme počet *p* dvojic (M, R), kde $M \in A, R \in \mathrm{R}, M \in R$:
(1) Každý *R* je nejvýše jednou ve dvojici (M, R), tedy $p \leq |\mathrm{R}| = n!$.
(2) Fixujme $M \in A: M = \{m_1, \ldots, m_k\}, |M| = k$.
Máme $R \in \mathrm{R}, M \in R \Rightarrow \{x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}\} = \{m_1, \ldots, m_k\}$.
Počet *R* s touto vlastností je $k! \cdot (n-k)!$.
Tedy $p = \sum_{M \in A} |M|! \cdot (n-|M|)! \leq n!$,
$1 \geq \sum_{M \in A} \frac{|M|! \cdot (n-|M|)! \leq n!}{n!} = \sum_{M \in A} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} =$
(Víme, že $\binom{n}{|M|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \Rightarrow \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \geq \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$)

$$=|A|\cdot\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}\Rightarrow\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\geq|A|\Rightarrow\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\geq\alpha(B_n)$$. Q.E.D.

(přednáška 11.3.09)

Princip inkluze a exkluze

Věta: PIE

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|$$

Důkaz první: indukcí. Pro 1 a 2 platí. Indukční krok $n\Rightarrow n+1$.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right|=\left|(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cup A_n+1\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|+|A_{n+1}|-\left|(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cap A_{n+1}\right|=\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|+|A_{n+1}|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right|=$$

$$=\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|+|A_{n+1}|-\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{i\in J}(A_i\cap A_{n+1})\right|=\underbrace{\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n+1\}}}_{n+1\notin J}(-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|-\underbrace{\sum_{\emptyset\neq J'\subseteq\{1,\dots,n+1\}}}_{n+1\in J}(-1)^{|J|'-2}\cdot\left|\bigcap_{i\in J'}A_i\right|=\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|$$

Q.E.D.

Důkaz druhý: pomocí binomické věty $(x+y)^n=\sum_{j\subseteq\{1,\dots,n\}}x^{|J|}\cdot y^{n-|J|}$.

Nechť $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ a je prvkem právě množin $A_{i_1},\dots,A_{i_k}$, *BÚNO* $A_{i_1}=A_1,\dots,A_{i_k}=A_k$.

x přispívá k pravé straně $\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,k\}}(-1)^{n-|J|}\cdot 1$, to má být rovno 1. $\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\cdot\binom{n}{i}=n-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\binom{n}{4}+\dots$

Platí $0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots\approx$ počet podmnožin sudé velikosti – počet podmnožin liché velikosti. Q.E.D.

Příklad: Pravděpodobnost, že permutace $(1,\dots,n)$ nemá pevný bod.

Permutace bez pevného bodu je bijekce $p:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{1,\dots,n\}$, kde $\forall i: p(i)\neq i$

Počet všech permutací je $n!$.

Označme *P* množinu všech permutací a *V* množinu permutací bez pevného bodu.

Pak $V=P\setminus\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}_{\text{perm.s}\geq 1\text{ pevným bodem}}$, kde $A_i=\{p\,;\,p(i)=i\}$.

$$|V|=|P|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=n!-\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|J|-1}\cdot\underbrace{\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|}_{=\{p\,\forall i\in J:\,p(i)=i\}}=n!+\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|J|}\cdot(n-|J|)!=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot(n-i)!=\sum_{i=0}^{n}n!\cdot\frac{(-1)^i}{i!}$$

Pravděpodobnost $\sum_{i=0}^{n}n!\cdot\frac{(-1)^i}{i!}\underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{e}$.

(přednáška 18.3.09)

Úloha: $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=?$ $\qquad=(1+x)^n\cdot(1+x)^n=$

(a) $(1+x)^{2\cdot n}=\sum_{k=0}^{2\cdot n}\binom{2\cdot n}{k}\cdot x^k$ **...** $\binom{2\cdot n}{n}$

(b) $\underbrace{(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k)}_{\dots x^k}\cdot\underbrace{(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^l)}_{\dots x^{n-k}}$ **...** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ **,** $(a)=(b)$

Úloha: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{n-i}=?$ $\qquad=(1-x)^n\cdot(1+x)^n=$

(a) $(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^k)\cdot(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\cdot x^l)$

(b) $(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-x^2)^k$

n liché $\rightarrow 0$

n sudé $\left(k=\frac{n}{2}\right)$ $\rightarrow\binom{n}{\frac{n}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}$

Úloha: $\sum_{i=0}^{n}i\cdot\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\binom{n}{i}=?$

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot x^i\underbrace{\Rightarrow}_{\text{derivace}}n\cdot(1+x)^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot i\cdot x^{i-1}$$

Dosadíme $x=1$: $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i = n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}$

Opak.: Binomická věta $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i}$

Multinomická věta: $(x_1+\ldots+x_p)^n = \sum_{(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}_0;\ \sum_{i=1}^{p} k_i=0} \binom{n}{k_1,\ldots,k_p} \cdot x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_p^{k_p}$, kde $\binom{n}{k_1,\ldots,k_p} = \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_p!}$

Zobecněná binom. věta: $(1+x)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} \cdot x^i$, kde $\binom{r}{i} = \frac{r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-i+1)}{i!}$; $\binom{r}{0}=1$

Vytvořující funkce

Def.: Uvažme posloupnost reálných čísel $(a_n)_0^{\infty}$. **Vytvořující funkce** je mocninná řada $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$.

Pokud existuje $k\in\mathbb{R}$ takové, že pro všechna $i\geq 1$ je $|a_i|\leq k^i$, potom

mocninná řada $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\cdot x^i$ **konverguje** pro $x\in(-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k})$.

Př.: $\frac{1}{1-x} = 1+x^2+x^3+\ldots$ konverguje na $(-1,1)$ (posloupnost $1,1,1,1,\ldots$).

Postup: Operace s mocninnými řadami

$(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ $\quad a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\cdot x^i$

$(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ $\quad b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\cdot x^i$

1. Sčítání:
   $a(x)+b(x) \Leftrightarrow (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots)$
2. Násobení $\alpha\in\mathbb{R}$:
   $\alpha\cdot a(x) \Leftrightarrow (\alpha\cdot a_0, \alpha\cdot a_1, \ldots)$
3. Přidání *n* nul na začátek:
   $x^n\cdot a(x) \Leftrightarrow (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, a_0, a_1, \ldots)$
4. Posunutí doleva:
   $\frac{a(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\cdot x^i}{x^n} \Leftrightarrow (a_n, a_{n+1}, \ldots)$
5. Dosazení $\alpha\cdot x$ za *x*:
   $a(\alpha\cdot x) \Leftrightarrow (\alpha^0\cdot a_0, \alpha^1\cdot a_1, \alpha^2\cdot a_2, \ldots)$
6. Dosazení x^n za *x*:
   $a(x^n) \Leftrightarrow (a_0, \overbrace{0,\ldots,0}^{n}, a_1, \overbrace{0,\ldots,0}^{n}, a_2, \ldots)$
7. Derivování (integrování):
   $a'(x) \Leftrightarrow (a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3, \ldots)$
   $\int_0^x a(t)\cdot dt \Leftrightarrow (C, a_0, \frac{1}{2}\cdot a_1, \frac{1}{3}\cdot a_2, \ldots)$
8. Násobení:
   $a(x)\cdot b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\cdot x^i$, kde $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\cdot b_{k-i}$
   $c_0 = a_0\cdot b_0$, $c_1 = a_0\cdot b_1 + a_1\cdot b_0$,
   $c_2 = a_0\cdot b_2 + a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_0$, ...

Př.: **Fibonacciho posloupnost** (zatím vynecháno)

Binární stromy

Def.: **Binární strom** (rekurentní definice)
(a) prázdný (0 vrcholů)
(b) s jedním vrcholem (**kořen**)
(c) kořen a uspořádaná dvojice binárních stromů

Úloha: Hledáme b_n počet binárních stromů s *n* vrcholy.

$(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ má vytvořující funkci $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\cdot x^i$

Pro $n\geq 1 : b_n =$ počet dvojic (B_L, B_P), kde B_L, B_P jsou binární stromy a $|V_{B_L}|+|V_{B_P}|=n-1$.

$$b_n=\sum_{k=0}^{n-1} b_k\cdot b_{(n-1)-k}\Rightarrow *$$

$$b(x)\cdot b(x)=c_0+c_1\cdot x+c_2\cdot x^2+\ldots=(b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+\ldots)^2 \text{, kde } c_n=\sum_{i=0}^{n} b_i\cdot b_{n-i}$$

$$*\Rightarrow b(x)=x\cdot b^2(x)+1\Rightarrow x\cdot b^2(x)-b(x)+1=0\Rightarrow b_{1,2}(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot x}}{2\cdot x}$$

$b_1(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-4\cdot x}}{2\cdot x}$ ...$\lim b_1(x)=+\infty$, to nemůže být součet konvergentní řady.

Zbývá tedy $b_2(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4\cdot x}}{2\cdot x}:=b(x)$.

$$\sqrt{1-4\cdot x}=(1-4\cdot x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cdot(-4\cdot x)^k$$

Koeficient u x^0 je $\binom{\frac{1}{2}}{0}=1$. V $1-\sqrt{1-4\cdot x}$ je nultý absolutní člen.

To lze vydělit $2\cdot x$ a dostáváme $b(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cdot(-4)^k\cdot x^{k-1}=\sum_{i=0}^{\infty}-\dfrac{1}{2}\cdot\binom{\frac{1}{2}}{i+1}\cdot(-4)^{i+1}\cdot x^{k-1}$,

tedy $$b_n=-\frac{1}{2}\cdot\binom{\frac{1}{2}}{n+1}\cdot(-4)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{4^{n+1}}{2}\cdot(-1)^{n+2}=$$

$$=\frac{\overbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n-1}{2}\cdot\frac{1}{2}}^{n+2\text{ členů}}\cdot 2^{2\cdot n+2}}{(n+1)\cdot n!}=\frac{2^4\cdot 1^2\cdot 3^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot(2\cdot n-1)^{2\cdot n}}{(n+1)\cdot n!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2\cdot n)!}{(n!)^2}=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2\cdot n}{n}$$

(Catalanova čísla)

Opak.: Teorie pravděpodobnosti, zde vynecháno.

Halleova věta, Systém různých reprezentantů

Def.: Mějme množinový systém $\mathsf{M}=(M_i; i=1,\ldots,n)$, kde M_i je konečné.

Systém různých reprezentantů je prosté zobrazení $f:\{1,\ldots,n\}\rightarrow\bigcup_{i=1}^{n} M_i$,

kde pro všechna $i=1,\ldots,n$ je $f(i)\in M_i$.

Př.: $M_1=\{\mathbf{1},2,3\}; M_2=\{1,4,\mathbf{5}\}; M_3=\{\mathbf{2},5\}; M_4=\{1,\mathbf{3},5\}$

Def.: Mějme graf $G=(V,E)$. $F\subseteq E$ se nazývá **párování** v grafu G, pokud pro všechna $v\in V; f,f'\in F: (v\in f\wedge v\in f')\Rightarrow f=f'$.

Úloha: Máme M množinový systém,

G bipartitní graf s partitami $\{1,\ldots,n\}$ a $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ a

$e\in E(G)\Leftrightarrow e=\{i,x\}, x\in M_i$.

$\mathsf{M}=(M_i; i=1,\ldots,n)$ nemá SRR, pokud existuje $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ takové, že $\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right|<|I|$.

Druhý případ:

Věta: **Halleova**

$\mathsf{M}=(M_i; i=1,\dots,n)$ má SRR $\Leftrightarrow \underbrace{\forall I\subseteq\{1,\dots,n\}: |I|\le\left|\bigcup_{i\in I} M_i\right|}_{\text{Halleova podmínka}}$.

Důkaz: $\Rightarrow$ jasné

$\Leftarrow$ matematickou indukcí dle $\sum_{i=1}^{n}|M_i|=k$:

(1) Předpokládejme, že $\exists J\subset\{1,\dots,n\}, J\neq\emptyset, |J|=\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right|$.

Položme $J'=\{1,\dots,n\}\setminus J; \mathsf{M}_J=(M_j; j\in J); \mathsf{M}_{J'}=(M_{j'}; j'\in J')$.

Pozorování: $\forall i=1,\dots,n: M_i\neq\emptyset$.

M_J splňuje Halleovu podmínku a $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right|<k$.

Dle indukčního předpokladu: M_J má SRR.

Položíme $\mathsf{M}'=(\underbrace{M_i\setminus(\bigcup_{j\in J} M_j)}_{M_i'}; i\in J')$, pak $\sum_{j\in J'}|M_j'|<k$

$I'\subseteq J': \left|\bigcup_{i\in I'} M_i'\right|=\left|\bigcup_{i\in I'\cup J} M_i\right|-\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right|\ge|I'\cup J|-|J|=|I'|+|J|-|J|=|I'|$

$\Rightarrow \mathsf{M}'$ splňuje Halleovu podmínku.

(2) Předpokládejme, že $\exists x\in\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ takové, že existuje právě jedno j, že $x\in M_j$ (*BÚNO* $j=n$).

Zvolíme x jako reprezentanta M_n a položíme $\mathsf{M}'=(M_i; i=1,\dots,n-1)$.

Dle předpokladu věty pro $I\subseteq\{1,\dots,n-1\}$ platí H.P.

a $\sum_{i=1}^{n-1}|M_i|<k$ … dle indukčního předpokladu existuje SRR pro M'.

(3) nenastane-li (1) ani (2):

x budiž libovolný prvek M_n.

Položíme $M_i'=\begin{matrix} M_i \text{ pro } i=1,\dots,n-1 \\ M_i\setminus\{x\} \text{ pro } i=n\end{matrix}$.

$\mathsf{M}'=(M_i'; i=1,\dots,n)$ splňuje Halleovu podmínku:

Mějme $I\subset\{1,\dots,n\}$.

Protože nenastala (1): $|I|\le\left|\bigcup_{i\in I} M_i\right|-1$ a $\left|\bigcup_{i\in I} M_i'\right|\ge\left|\bigcup_{i\in I} M_i\right|-1$,

tedy $|I|\le\left|\bigcup_{i\in I} M_i'\right|$.

Zbývá ověřit $\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i'\right|\ge n$, ale protože nenastala (2),

tak $\exists i<n: x\in M_i\Rightarrow x\in M_i'$ a $\bigcup_{i=1}^{n} M_i'=\bigcup_{i=1}^{n} M_i$.

Zároveň $\sum_{i=1}^{n}|M_i'|=k-1<k$ a dle indukčního předpokladu

má M' SRR a ten je SRR pro M ($M_i'\subseteq M_i$). Q.E.D.

Tvrz.: **Nechť** G je bipartitní graf s partitami V_1, V_2 a $E\neq 0$,
pro všechna $x\in V_1, y\in V_2$ platí, že $deg(x)\ge deg(y)$.
Pak existuje párování F v G takové, že pokrývá V_1.

Důkaz: $V_1=\{x_1,\dots,x_n\}, V_2=\{y_1,\dots,y_n\}$

Položme $\mathsf{M}=(M_i; i=1,\dots,n)$ tak, že $M_i=\{y_j; \{x_i,y_j\}\in E\}$,

$J\subseteq\{1,\dots,n\}$, $S_J=\{y\in V_2; \exists j\in J: \{x_j,y\}\in E\}=\bigcup_{j\in J} M_j$.

Chceme, aby platila Halleova podmínka: $|J|\le|S_J|$

Počet hran $G[\{x_j; j\in J\}\cup S_J]=\sum_{j\in J} deg(x_j)\le\sum_{y\in S_J} deg(y)$

Označme $k_1=min\{deg(x_j); j\in J\}, k_2=min\{deg(y); y\in S_J\}$.

Platí $k_1\ge k_2>0$: $\sum_{j\in J} deg(x_j)\ge k_1\cdot|J|$; $\sum_{y\in S_J} deg(y)\le k_2\cdot|S_J|$

$\Rightarrow k_1\cdot|J|\le k_2\cdot|S_J|\Rightarrow\underbrace{\frac{k_1}{k_2}}_{\ge 1}\cdot|J|\le|S_J|\Rightarrow$ Halleova podmínka platí, Q.E.D.

Př: Latinské čtverce a obdélníky

Def: **Latinský čtverec** řádu $n\ge 1$ je matice A řádu $n\times n$ taková, že
pro všechna $i,j: a_{i,j}\in\{1,\dots,n\}$ a pro všechna $i,r,s,r\neq s: a_{i,r}\neq a_{i,s}\wedge a_{r,i}\neq a_{s,i}$

Úloha: Odhad počtu latinských čtverců: $\prod_{k=1}^{n}(k!)^{\frac{n}{k}}\ge L(n)\ge\frac{(n!)^{2\cdot n}}{n^{n^2}}$

Def: **Latinský obdélník** řádu $k\times n(1\le k\le n)$ je matice A' typu $k\times n$, která splňuje podmínky latinského čtverce.

Tvrz.: Každý latinský obdélník $k\times n$ lze doplnit na latinský čtverec $n\times n$.

Důkaz: $1\le k<n$ rozšíříme o řádek $k+1$:

$A'=(a_{i,j}); i=1,\dots,k; j=1,\dots,n$.

Hledáme a_{k+1} doplňující A' na latinský obdélník $(k+1)\times n$.

Položíme $M_j=\{1,\dots,n\}\setminus\{a_{1,j},\dots,a_{k,j}\}$,

$\mathsf{M}=(M_j; j=1,\dots,n)$ a $f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ SRR pro M.

Definujeme $a_{k+1,j}=f(j)$. Toto je korektní rozšíření A'.

Otestujeme již jen Halleovu podmínku: $|J|\le\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right|, J\subseteq\{1,\dots,n\}$:

Definujeme G bipartitní graf s partitami $\{x_1,\dots,x_n\},\{y_1,\dots,y_n\}$,

kde $\{x_i,y_j\}\in E\Leftrightarrow j\in M_i$.

Platí: $\forall i=1,\dots,n: deg(x_i)=|M_i|=n-k=a$

$\forall j=1,\dots,n: deg(y_j)=|M_j|=n-k=b$, $b\le a$.

Dle předchozího tvrzení existuje SSR pro M, Q.E.D.

(přednáška 7.4.09)

Konečná projektivní rovina

Def.: **Konečná projektivní rovina** je dvojice (X, P), kde X je konečná neprázdná množina, $\mathsf{P}\subseteq 2^X$ a platí axiomy

(P0) $\exists \check{c}\in X: |\check{c}|=4; \forall P\in\mathsf{P}: |P\cap\check{c}|\le 2$

(P1) $P_1, P_2\in\mathsf{P}, P_1\neq P_2\Rightarrow|P_1\cap P_2|=1$

(P2) $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists!\, P \in \mathsf{P}: x_1, x_2 \in P$

Tvrz.: (X, P) je KPR, potom $\forall P_1, P_2 \in \mathsf{P}: |P_1| = |P_2|$.

Důkaz: $P_1 \neq P_2$. Dle (P0) existuje $\check{c} = \{a, b, c, d\}$, kde platí:
(a) existuje jeden bod $\notin (P_1 \cup P_2)$ anebo
(b) body jsou na P_1, P_2 po dvou, *BÚNO* $P_1 = \overline{ab}, P_2 = \overline{cd}$.
Uvažme přímky $Q_1 = \overline{ac}, Q_2 = \overline{bd}$.
Dle (P1) existuje $y \in X : y \in (Q_1 \cap Q_2) \wedge y \notin (P_1 \cup P_2)$

Oindexujeme $P_1 = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$, položíme $R_i = \overline{yx_i}, i = 1, \ldots, n$.
$R_i \cap P_2 = x'_i \neq x$, jinak $|R_i \cap P_1| \geq 2 \Rightarrow$ *SPOR*,
$i \neq j \Rightarrow x'_i \neq x'_j$, jinak $|R_i \cap R_j| \geq 2 \Rightarrow$ *SPOR*,
tedy $|P_1| \leq |P_2|$. Analogicky dokážeme $|P_1| \geq |P_2| \Rightarrow |P_1| = |P_2|$, Q.E.D.

Def.: **Řád** KPR (X, P) je roven $|P| - 1$ pro $P \in \mathsf{P}$.

Tvrz.: (X, P) je KPR řádu *n*, potom platí:
(0) $\forall P \in \mathsf{P}: |P| = n+1$
(1) $\forall x \in X: |\{P \in \mathsf{P}; x \in P\}| = n+1$
(2) $|X| = n^2 + n + 1$
(3) $|\mathsf{P}| = n^2 + n + 1$

Důkaz: (0) z definice
(1) Vezměme libovolný $x \in X$. Dle (P0) existuje $a, b, c \in \check{c} \setminus \{x\}$,
že $\overline{ab} \cap \overline{ac} = \{a\} \Rightarrow x \notin \overline{ab} \vee x \in \overline{ac}$.
$\exists P \in \mathsf{P}: x \in P$, označíme toto $P = \{a_0, \ldots, a_n\}$ a $P_i = \overline{a_i x}; i = 0, \ldots, n$.
Ať $Q \in \mathsf{P}: x \in Q \Rightarrow |Q \cap P| = 1$, tedy existuje $i: a_i \in Q$.
$\{x, a_i\} \subseteq (P_i \cap Q) \Rightarrow P_i = Q$

(2) Vezměme libovolnou $P \in \mathsf{P}, P = \{x_0, \ldots, x_n\}, a \notin P$ libovolný.
Položme $P_i = \overline{ax_i}; i = 0, \ldots, n-1$.
$\left|\sum_{i=1}^{n} P_i\right| = (n+1)\cdot(n+1) - n = n^2 + n + 1$.
(3?) Ať je $b \in X$. Pro $b = a$ …ok, jinak:
Položíme $Q = \overline{ab} \Rightarrow (P_i \cap Q) = \{x_i\}$ a zároveň
$a, x_i \in Q \Rightarrow Q = P_i$, Q.E.D.

Def.: **Dualita** je (A, M) , kde $\mathsf{M} \subseteq 2^A$.
(M, B) je **duální systém** pro $\mathsf{B} = \{\{M \in \mathsf{M}; a \in M\}, a \in A\}$.

Tvrz.: Duální systém ke KPR řádu *n* je KPR řádu *n*.
Pozn., jako důsledek má (3) v předchozím tvrzení.

Důkaz: $(X, \mathsf{P}) \to (\mathsf{P}, \mathsf{T}); \mathsf{T} = (T_x; x \in X); T_x = \{P \in \mathsf{P}; x \in P\}$
(P0)* $\exists P_1, \ldots, P_4 \in \mathsf{P}$ různé, tž. $\forall x \in X: |T_x \cap \{P_1, \ldots, P_4\}| \leq 2$.
(X, P) je KPR $\Rightarrow \exists \check{c} \subseteq X: \check{c} = \{a, b, c, d\}$.
$P_1 = \overline{ab}; P_2 = \overline{bc}; P_3 = \overline{cd}; P_4 = \overline{da}$, ať $x \in P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
Pak $x \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow x = b; x \in P_2 \cap P_3 \Rightarrow x = c$, *SPOR*.
Žádné tři přímky nemají jeden společný průsečík.

(P1)* $\forall x, y \in X, x \neq y: |T_x \cap T_y| = 1$
$T_x \cap T_y = \{P \in \mathsf{P}; x \in P, z \in P\} \overset{(P2)}{\Rightarrow} \exists!\, P \in \mathsf{P}: x, y \in P$
(P2)* $\forall P_1, P_2 \in \mathsf{P}, P_1 \neq P_2 \overset{(P1)}{\Rightarrow} \exists!\, x: x \in P_1 \cap P_2$
$P_1, P_2 \in T_x$. Ať $P_1, P_2 \in T_y$ pro $x \neq y \Rightarrow y \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow$ *SPOR*.
Q.E.D.?

Konstrukce KPR

Př.:

Věta: Nechť $n = p^e$, kde *p* je prvočíslo, $e \geq 1$. Potom existuje KPR řádu *n*.

Důkaz: Existuje $\boldsymbol{F}$ těleso s právě *n* prvky.
$X = \{(x, y); x, y \in \boldsymbol{F}\} \cup \{(*, y); y \in \boldsymbol{F}\} \cup \{(*, *)\}$
P: $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}: P_{\alpha\beta} = \{(x, \alpha \cdot x + \beta); x \in \boldsymbol{F}\} \cup \{(*, \alpha)\}$
$y \in \boldsymbol{F}: P_y = \{(y, y); y \in \boldsymbol{F}\} \cup \{(*, *)\}$
$P_* = \{(*, y); y \in \boldsymbol{F}\} \cup \{(*, *)\}$

(P0) $\check{c} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, $\forall P \in \mathsf{P}: |\check{c} \cap P| \leq 2$
(P1) $P_1 = P_{\alpha_1\beta_1}, P_2 = P_{\alpha_2\beta_2}$
$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow (*, \alpha_1) \subseteq P_1 \cap P_2$
$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \cdot x + \beta_1 = \alpha_2 \cdot x + \beta_2 \Rightarrow x = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$
$(x, \alpha_1 \cdot x + \beta_1) \in P_1 \cap P_2$, Q.E.D.

Def.: Latinské čtverce *A, B* řádu *n* jsou **ortogonální**:
$A \perp B \Leftrightarrow (\forall i, j, i', j', (i, j) \neq (i', j') \Rightarrow (a_{i,j}, b_{i,j}) \neq (a_{i',j'}, b_{i',j'}))$

Tvrz.: $A_1, \ldots, A_m$ budiž navzájem po dvou ortogonální latinské čtverce řádu *n*, pak $m \leq n-1$.

Důkaz: Mějme $A \perp B$ latinské čtverce řádu *n*,
$\Pi \in S_n; A' = (a'_{i,j})_{i,j=1}^n, a'_{i,j} = \Pi(a_{i,j})$.
Potom $A' \perp B$.

BÚNO je první řádek $A_i = 1, \ldots, n$ pro $i < 1, \ldots, m$,
tedy např. $(A_i)_{2,1} \neq 1$ a pro $i \neq j: (A_i)_{2,1} \neq (A_j)_{2,1} \Rightarrow m \leq n-1$, Q.E.D.

(přednáška 15.4.09)

Věta: Pro $n \geq 2$ existuje KPR řádu *n*, právě když existuje $n-1$ vzájemně ortogonálních latinských čtverců řádu *n*.

Důkaz: Mějme $A_1, \dots, A_{n-1}$ ortogonální latinské čtverce řádu *n*, $(X, \mathcal{P})$ KPR řádu *n*. Zde platí následující:

$|X| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1;\ \forall P \in \mathcal{P} : |P| = n+1;\ \forall x \in X : |\{P \in \mathcal{P}; x \in P\}| = n+1$

.

Zvolíme *r, s* libovolné body, $P = \overline{rs}$, ostatní body označíme $l_1, \dots, l_{n-1}$.

Budiž $P_1, \dots, P_n$ přímky tž. $r \in P_i, s \notin P_i, i = 1, \dots, n$ a

$Q_1, \dots, Q_n$ přímky tž. $s \in Q_i, r \notin Q_i, i = 1, \dots, n$,

Označme $\forall i, j = 1, \dots, n : x_{i,j} = P_i \cap Q_j$ průsečík.

Dále konstruujeme přímky dle latinského čtverce:

$a = 1, \dots, n-1;\ b = 1, \dots, n \Rightarrow L_{a,b} = \{l_a\} \cup \{x_{i,j}; (A_a)_{i,j} = b\}$

Ověříme axiomy: (P0) $č = \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}\}$ (z obr.)

(P1) *P* s ostatními – OK.

$P_i \cap Q_j$ dle definice – OK.

$P_i \cap L_{a,b} : \exists!\, j : (A_a)_{i,j} = b$ – OK.

$L_{a,b} \cap Lc, d$: $a = c \Rightarrow La, b \cap Lc, d = \{l_a\}$

$a \neq c \Rightarrow A_a \perp A_c \Rightarrow \exists!\,(i,j) : x_{i,j} : (A_a)_{i,j} = b; (A_c)_{i,j} = d$ – OK.

(P2) Zřejmé. Q.E.D.

Věta: Mějme *n* mocninu prvočísla, potom existují $A_1, \dots, A_{n-1}$ navzájem ortogonální latinské čtverce řádu *n*.

Důkaz: Mějme $\boldsymbol{K}$ komutativní těleso řádu *n*.

Označme prvky $t_0 = 0, t_1 = 1, \dots, t_{n-1}$,

$k = 1, \dots, n-1; i, j = 0, \dots, n-1$ a budiž $(A_k)_{i,j} = t_k \cdot t_i + t_j$.

Je A_k latinský čtverec?

V *i*-tém řádku jsou prvky $t_k \cdot t_i + t_0, t_k \cdot t_i + t_1, \dots, t_k \cdot t_i + t_{n-1}$ různé,

v *j*-tém sloupci jsou prvky $t_k \cdot t_0 + t_j, \dots, t_l \cdot t_{n-1} + t_j$ různé,

ještě zbývá ověřit $k \neq k' \Rightarrow A_k \perp A'_k$.

Ať $\exists \underbrace{i, j, i',}_{\text{různé}} j' : ((A_k)_{i,j}, (A_{k'})_{i,j}) = ((A_k)_{i',j'}, (A_{k'})_{i',j'})$.

$t_k \cdot t_i + t_j = t_k \cdot t_{i'} + t_{j'};\ t_{k'} \cdot t_i + t_j = t_{k'} \cdot t_{i'} + t_{j'}$

$t_i \cdot (\underbrace{t_k - t_{k'}}_{\neq 0}) = t_{i'} \cdot (t_k - t_{k'}) \Rightarrow t_i = t_{i'};\ t_j = t_{j'} \Rightarrow i = i';\ j = j'$, *SPOR*. Q.E.D.

Bloková schémata

Def.: Nechť *X* je konečná množina, $\mathcal{B} \subseteq 2^X;\ n, k, t, \lambda \in \mathbb{Z}, n > k > t \geq 1, \lambda \geq 1$,
pak $(X, \mathcal{B})$ je **blokové schéma** typu $t - (n, k, \lambda)$, pokud platí

(1) $|X| = n$

(2) $\forall B \in \mathcal{B} : |B| = k$

(3) $\forall T \in \binom{X}{t}$ existuje přesně λ množin $B_i, i = 1, \dots, \lambda$, že $B_i \in \mathcal{B}, T \in B_i$.

Př.: (1) Triviální blokové schéma: $|X| = n, \mathcal{B} = \binom{X}{k}, \lambda = \binom{n-t}{k-t}$

(2) KPR řádu *n* $(K, \mathcal{P})$ je zároveň blokové schéma typu $2 - (n^2 + n + 1, n+1, 1)$

(3) Blokové schéma typu $1 - (n, k, 1)$ existuje, právě když $k | n$.

Věta: Ať existuje blokové schéma typu $t - (n, k, \lambda)$, potom jsou následující zlomky celočíselné:

$$\lambda \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-t+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-t+1)}, \lambda \cdot \frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-t+1)}{(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-t+1)}, \dots, \lambda \cdot \frac{n-t+1}{k-t+1}.$$

Důkaz: $(X, \mathcal{B})$ dle zadání, platí $|\mathcal{B}| = \lambda \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-t+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-t+1)}$.

Zvolme $S \subseteq X, |S| = s \leq t$ a počítejme počet dvojic (T, B) takových, že $S \subseteq T \in \binom{X}{t}, T \subseteq B \subseteq \mathcal{B}$:

(a) *S* lze na *T* rozšířit $\binom{n-s}{t-s}$ způsoby, *T* je v λ blocích.

(b) libovolné *B* takové, že $S \subseteq B$, obsahuje $\binom{k-s}{t-s}$ různých $T \in \binom{X}{t}$ takových, že $S \subseteq T \subseteq B$.

Tedy počet bloků obsahujících *S* je $\frac{\text{(a)}}{\text{(b)}}$,

$$\frac{\lambda \cdot \binom{n-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} = \lambda \cdot \frac{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-s-t+s+1)}{(t-s)!}}{\frac{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-s-t+s+1)}{(t-s)!}} \text{ celé číslo}$$

$s = 0, \dots, t-1$ Q.E.D.

Def.: **Steinerovské systémy trojic** jsou bloková schémata typu $t = 2, \lambda = 1, k = 3$.

Př.: Fanova rovina, KPR řádu 2...
KPR řádu 3 bez bodů jedné přímky
afinní rovina

(přednáška 22.4.09)

Toky v sítích

Def.: **Síť** je (G, s, t, c), kde G je orientovaný graf (V, E),

$s, t \in V, s \neq t$ (*s*: source, zdroj, start, *t*: target, spotřebič, stok) a
$c: E \to \mathbb{R}_0^+$ (kapacita).

Def.: **Tok** je $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ taková, že $\forall e \in E: f(e) \leq c(e)$ a
$\forall v \in V, v \neq s, t: \sum_{(x,v) \in E} f(x,v) = \sum_{(v,x) \in E} f(v,x)$.
Velikost toku je $|f| = \sum_{(s,x)} f(s,x) - \sum_{(x,s)} f(x,s) = \sum_{(x,t)} f(x,t) - \sum_{(t,x)} f(t,x)$.

☼: Pro všechny sítě existuje tok.

Věta: Pro každou síť existuje maximální tok.

Pozn., do odvolání uvažujeme *BÚNO G* souvislý (v rámci této přednášky).

Def.: **Řez** mezi *s* a *t* je $R \subseteq E$ taková,
že v síti (G', s, t, c') neexistuje žádná orientovaná cesta ze *s* do *t*, kde $G' = (V, E \setminus R)$.

Def.: Je-li $A \subseteq V, s \in A, t \notin a$, označme $R(A, V \setminus A) := \{e \in E; e = (a,b), a \in A, b \notin A\}$.
Potom $R(A, V \setminus A)$ je řez a nazývá se **elementární řez**.

Def.: Mějme (G, s, t, c) síť, *f* tok, ať $s = v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = t$ je neorientovaná cesta ze *s* do *t*,
že $i \neq j: v_i \neq v_j;\ e_i = (v_{i-1}, v_i) \vee e_i = (v_i, v_{i-1})$.
Tato cesta je **nenasycená** (**vylepšující**), je-li $f(e_i) < c(e_i)$ pro $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ a
$f(e_i) > 0$ pro $e_i = (v_i, v_{v-1})$,
nasycená jinak.

Lemma: Mějme (G, s, t, c) síť, *f* tok. *f* je maximální, právě když neexistuje vylepšující cesta ze *s* do *t*.

Důkaz: Ať $s = v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = t$ je vylepšující cesta.

$\Rightarrow$ Položme $\epsilon_1 = \min_{e_i = (v_{i-1}, v_i)} \{c(e_i) - f(e_i)\} > 0$,

$\epsilon_2 = \min_{e_i = (v_i, v_{i-1})} \{f(e_i)\} > 0;\ \epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$ a konečně

$f'(e) = f(e)$, pokud $e \neq e_i, i = 1, \dots, k$,
$f(e) + \epsilon$, pokud $e = e_i = (v_{i-1}, v_i)$,
$f(e) - \epsilon$, pokud $e = e_i = (v_i, v_{i-1})$.

Platí, že f' je tok, $|f'| = |f| + \epsilon > |f|$, *SPOR*.

$\Leftarrow$ $A = \{v \in V; \exists \text{vylepšující cesta ze } s \text{ do } v\}, s \in A, t \notin A$,
potom $R(A, V \setminus A)$ je řez.
$e \in R, e = (a,b), a \in A, b \notin A \Rightarrow f(e) = c(e)$ (jinak by šlo prodloužit vylepšující cestu do *b*)

$c(R) = \sum_{e \in R} c(e) = \sum_{e \in R} f(e) \underbrace{\geq}_{(*)} |f|$

Ať *R′* je libovolný řez a *f′* je libovolný tok, potom $|f'| \leq |c(R')|$.

Protože $|f| = |c(R)|$, tak *f* je max. Q.E.D.

(*) Nerovnost:
$|f| = \sum_{v \in A} (\sum_{(v,x)} f(v,x) - \sum_{(x,v)} f(x,v)) = \sum_{v \in A} \sum_{(v,x)} f(v,x) - \sum_{v \in A} \sum_{(x,v)} f(x,v)$
$\underbrace{\sum_{e = (a,b)} f(a,b)}_{c(R)} - \underbrace{\sum_{e = (b',a')} f(b',a')}_{\geq 0} \leq c(R)$.

Platí $e = (b,a), b \notin A, a \in A \Rightarrow f(e) = 0$ a tedy $\sum_{e \in R} f(e) = |f|$.

Důsl.: $\max_{f \text{ tok}} |f| \leq \min_{R \text{ řez}} c(R)$.

Věta: Nechť (G, s, t, c) je síť, pak $\max_{f \text{ tok}} |f| = \min_{R \text{ řez}} c(R)$.

$\leq$ Již máme. Pro spor ať *f* je maximální tok,
R minimální řez, ale $|f| < c(R)$.
$A = \{v \in V; \exists \text{vylepšující cesta ze } s \text{ do } v\}, s \in A, t \notin A$ a
$R(A, V \setminus A)$ je řez $c(R(A, V \setminus A)) = |f| < c(R)$, *SPOR*. Q.E.D.

Alg.: **Ford-Fulkerson** (pro $c(e) \in \mathbb{Z}\ \forall e$)

1. $\forall e: f(e) = 0$
2. Existuje-li vylepšující cesta ze *s* do *t*, zvětšíme tok podél cesty a opakovat (2).
3. Tok je maximální, konec.

Důsl.: Je-li (G, s, t, c) síť s celočíselnými kapacitami, potom existuje celočíselný maximální tok.
$\Rightarrow$ Je-li (G, s, t, c) síť a $\forall e: c(e) \in \mathbb{Q}$, potom existuje maximální tok.

$f:\{1,\dots,n\}\to\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ a $\forall i\in\{1,\dots,n\}: f(i)\in M_i$. SRR odpovídá párování velikosti *n*.
$X=\bigcup_{i=1}^{n} M_i;\ \ (i,x)\in E \Leftrightarrow x\in M_i$.
Budiž *f* celočíselný tok $|f|\le n$, $E\cap\{e;f(e)=1\}$ je párování.
SRR existuje, právě když existuje celočíselný tok velikosti *n*.

Úloha: Kapacita na vrcholech.

Míra souvislosti v grafech

Def.: Mějme graf $G=(V,E), k\in\mathbb{N}$.
G je **vrcholově *k*-souvislý**, pokud $|V|\ge k+1$ a pro $\forall\, U\subseteq V: |U|\le k-1$ je $G\setminus U$ souvislý.
G je **hranově *k*-souvislý**, pokud pro $\forall\, F\subseteq E: |F|\le k-1$ je $G\setminus F$ souvislý.
$U\subseteq V$ je **vrcholový řez**, je-li $G\setminus U$ nesouvislý.
$F\subseteq E$ je **hranový řez**, je-li $G\setminus F$ nesouvislý.
Vrcholová souvislost je $k_V(G)=min\{|U|; U \text{ vrcholový řez}\}$, pokud $G\ne K_n$, jinak $k_V(K_n)=n-1$.
Hranová souvislost je $k_E(G)=min\{|F|; F \text{ hranový řez}\}$

Lemma: Mějme $G=(V,E), e\in E$, pak $k_E(G)-1\le k_E(G-e)\le k_E(G)$.

Důkaz: Uvažme *F* minimální hranový řez.
$F'=F\setminus\{e\}$ je řez $G-e$, ale nemusí být minimální.
$|F|-1\le|F'|\le|F|\Rightarrow k_E(G-e)\le|F'|\le|F|\le k_E(G)$
Položme *F''* minimální řez $G-e$, $F''\cup\{e\}$ je řez *G*.
$\underbrace{|F''\cup\{e\}|}_{\ge k_E(G)}=|F''|+1=k_E(G-e)+1$, Q.E.D.

Lemma: Mějme $G=(V,E), e\in E$, pak $k_V(G)-1\le k_V(G-e)\le k_V(G)$.

Důkaz: Uvažme $U\subseteq V$ minimální řez *G*.
$G\setminus U$ není souvislý. Položme $H:=G-e$.
$1+k_V(H)\ge k_V(H+e)$.
Vezměme *U'* minimální řez *H*, $k_V(H)=|U'|$.
$H\setminus U$ má komponenty $C_1,\dots,C_r, r\ge 2$.
$e=\{x,y\}$ a může nastat:
(1) $x\in U'$ nebo $y\in U'$
$e\notin E((H+e)\setminus U')\Rightarrow(H+e)\setminus U'=H\setminus U'$
(2) $\exists i: x,y\notin C_i$ komponenta grafu $(H+e)\setminus U'$
$\Rightarrow$ graf nesouvislý.
(3) $x\in C_1, y\in C_2, r=2$ a máme dvě možnosti:
buď $|C_1|=|C_2|=1\Rightarrow H+e\simeq K_n;\ k_V(H)=n-2, k_V(H+e)=n-1$
anebo $|C_1|\ge 2\Rightarrow C_1\setminus\{x\}, C_2$ komponenty $(H+e)\setminus(U'\cup\{x\})$, Q.E.D.

Tvrz.: $k_V(G)\le k_E(G)$

Důkaz: indukcí dle $|E|$
(1) $|E|<|V|-1\Rightarrow G$ nesouvislý, $k_V(G)=k_E(G)=0$ a dokonce platí pro každý *G* nesouvislý.
(2) *G* souvislý, $k_E(G)\ge 1, F$ minimální hranový řez.
$\Rightarrow F\ne\emptyset\wedge\exists e\in F$.
Položíme $G':=G-e$, dle I.P. $k_V(G')\le k_E(G')$.
Platí $k_E(G')=k_E(G)-1$ a
$k_V(G)-1\underbrace{\le}_{\text{Lemma 2}} k_V(G')\underbrace{\le}_{\text{I.P.}} k_E(G')=k_E(G)-1$, Q.E.D.

2-souvislost

Tvrz.: Graf $G=(V,E)$ je 2-souvislý, právě když $\forall\, u,v\in V\ \exists$ kružnice v *G*, která obsahuje i *v*.

Tvrz.: **Ušaté lemma**
Každý 2-souvislý graf lze sískat z kružnice přidáním uší, kde
ucho je cesta, která má s původním grafem společné právě koncové vrcholy.

Důkaz: *G* je 2-souvislý $\Rightarrow|V|\ge 3, e=\{u,v\}\in E, k_E(G)\ge k_V(G)\ge 2$
$G-e$ souvislý $\Rightarrow\exists$ cesta z *u* do *v* v $G-e\Rightarrow P+e$ kružnice.
G' maximální podgraf *G* vzniklý přidáváním uší ke kružnici.
Ať existuje $e'\in E\setminus E(G')$. Možnosti:
(1) $e'=\{x,y\}, x,y\in V(G')\Rightarrow e'$ ucho *v*. OK
(2) $x\in V(G'), y\notin V(G')\Rightarrow G-x$ souvislý.
Buď *P'* cesta z *y* do $V(G)$ v *G*. Pak $P'+e'$ je ucho. OK
(3) $x,y\notin V(G)\Rightarrow\exists$ cesta z *x* do $V(G')$ v *G*.
Buď *e''* poslední hrana této cesty, $e''=\{a,b\}, a\in V(G'), b\notin V(G')$
Převedeno na případ (2). Q.E.D.

Věta: **Ford-Fulkersonova**
Mějme $G=(V,E), k\in\mathbb{N}$. Pak $k_E(G)\ge k\Leftrightarrow\forall\, u,v\in V, u\ne v\ \exists\, k$ hranně disjunktních cest z *u* do *v*.

Důkaz: $\Leftarrow$ Ať *F* je minimální řez $|F|<k$ a
u, *v* jsou v různých komponentách $G\setminus F$.

Existují $P_1, \dots, P_k$ hranně disjunktní cesty z *u* do *v*:
$\forall i : |P_i \cap F| \geq 1 \Rightarrow \exists e_i \in P_i \cap F : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$
a tedy $\Rightarrow \{e_1, \dots, e_k\} \subseteq F, |\{e_1, \dots, e_k\}| = k$, *SPOR.*
$\Rightarrow$ Mějme *G'* síť, zdrojem budiž *u*, spotřebičem *v*, $c \equiv 1$,
f maximální celočíselný tok v *G'* neobsahující kružnice délky 2,
R minimální řez $|f| = |R|$. Položme $F = \{\{x, y\}; (x, y) \in R\}$.

$k \leq |f| \leq |R| \Rightarrow |f| \geq k$ a najdeme $P_1, \dots, P_k$ disjunktní cesty *uv*.
(1) $k = 1$: hrany s $f = 1$ obsahují tok z *u* do *v*, tedy minimální tok je cesta z *u* do *v*.
(2) $k \geq 2$: hrany s $f = 1$ obsahují tok z *u* do *v*.
P_1 cesta z *u* do *v*. Na P_1 nastavíme $f_1 = 0$, jinak *f*.
$|f_1| = |f| - 1$ a postup indukcí. Q.E.D.

Věta: **Menger**

Mějme $G = (V, E), k \in \mathbb{N}$. Pak $k_V(G) \geq k \Leftrightarrow \forall u, v \in V, u \neq v \; \exists k$ vrcholově disjunktních cest z *u* do *v* (až na koncové vrcholy).

Důkaz: $\Leftarrow$ Ať *U* je minimální vrcholový řez $|U| < k$,
u, v v různých komponentách $G \setminus U$.
Existují $P_1, \dots, P_k$ vrcholově disjunktní cesty z *u* do *v* a
$\forall i : |P_i \cap U| \Rightarrow \exists v_i \in P_i \cap U : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$.
Pak $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq U, |\{v_1, \dots, v_k\}| = k$, *SPOR.*
$\Rightarrow$ Symetrická orientace v *G*,
$\forall x \in V, x \neq u, v$: ...
Zdroj $u \to u''$, spotřebič $v \to v', c \equiv 1$,
$F = \{(x', x''); x \in V \setminus \{u, v\}\}$,

f maximální tok v síti, *R* maximální řez,
že $\forall e \in R \setminus F$ najdeme $e' : e = (x'', y')$.
Buď $x \neq u : e' = (x', x'')$ jedna z nich
nebo $y \neq v : e' = (y', y'')$.
Předpoklad: $\{u, v\} \notin E$, jinak totéž v $\underbrace{G - e}_{\{u, v\}}$.
Položíme $R' = R$ bez hran $e \in R \setminus F$, ale s *e'*.
$|R'| < |R|$, *R'* řez $\Rightarrow |R'| = |R|, R' \subseteq F$.
$U = \{x; (x', x'') \in R'\} \Rightarrow U$ řez v *G*.
$k \leq |U| = |F|$. Q.E.D.

Ramseyovy věty

Věta: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall G = (V, E), |V| = N : \quad K_n \subseteq G \; \vee \; E_n \subseteq G$ indukovaně.

$R(n)$ budiž minimální takové *N*.

Důkaz: Ukážeme $R(n) \leq 4^{n-1}$.
Vezměme $G = (V, E), |V| = 2^{2 \cdot n - 2}, v_1$ libovolný vrchol z *V*.
$\exists V_1 \subseteq V \setminus \{v_1\}$, že buď $\forall v \in V_1 : \{v, v_1\} \in E \;\wedge\; |V_1| \geq \frac{|V| - 1}{2} = 2^{2 \cdot n - 3}$
nebo $\forall v \in V_1 : \{v, v_1\} \notin E$.
Vezměme v_2 libovolný vrchol z V_1 .
$\exists V_2 \subseteq V_1 \setminus \{v_2\}$, že buď $\forall v \in V_2 : \{v, v_2\} \in E \;\wedge\; |V_2| \geq \frac{|V_1|}{2} \geq 2^{n-4}$
nebo $\forall v \in V_2 : \{v, v_2\} \notin E$.
Dále indukcí v_i z v_{i-1} :

$\exists V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_i\}$, že buď $\forall v \in V_i : \{v, v_i\} \in E \;\wedge\; |V_i| \geq \frac{|V_{i-1}|}{2} \geq 2^{2 \cdot n - 2 - i}$
nebo $\forall v \in V_i : \{v, v_i\} \notin E$
(pro $\forall v$ u v_i víme, že je s nimi (ne)spojen)
Končíme s $v_{2 \cdot n - 1}$ a máme posloupnost $v_1, \dots, v_{2 \cdot n - 1}$ takovou,
že $\forall i \;\; \forall j > i$ buď $\{v_i, v_j\} \in E \Rightarrow v_i$ označíme $\oplus$
nebo $\{v_i, v_j\} \notin E \Rightarrow v_i$ označíme $\ominus$.
Existuje znaménko a existuje $i_1, \dots, i_n$ takové,
že $G[\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}]$ je K_n pro $\oplus$ anebo E_n pro $\ominus$.

Tvrz.: Pro $n \geq 4$ je $R(n) > (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}$.

Důkaz: Mějme $N = 2^{\frac{n}{2}}, G$ náhodný graf s *N* vrcholy a
$\{u, v\} \in E$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (nezávisle).
n-prvková podmnožina vrcholů indukuje
K_n s pravděpodobností $(\frac{1}{2})^{\binom{n}{2}}$,
E_n stejně tak.
Pravděpodobnost, že *G* má indukovaný podgraf
$K_n : = P_1 \leq \binom{N}{n} \cdot (\frac{1}{2})^{\binom{n}{2}}$ a

$E_n : = P_2 \leq \binom{N}{n} \cdot (\frac{1}{2})^{\binom{n}{2}}$.
K_n nebo $E_n : = P_I \leq P_1 + P_2 =$
$= 2 \cdot \binom{N}{n} \cdot (\frac{1}{2})^{\binom{n}{2}} = 2 \cdot \frac{N!}{n! \cdot (N - n)!} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n^2 - n}{2}}} \leq 2 \cdot \frac{N^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n^2 - n}{2}}} =$
$= 2^1 \cdot 2^{\frac{n^2}{2}} \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-\frac{n^2}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^{1 - \frac{n}{2}} < 1$.
Pravděpodobnost, že *G* nemá indukovaný podgraf K_n nebo E_n :
$P_N = 1 - P_I > 0 \Rightarrow \exists$ graf s $2^{\frac{n}{2}}$ vrcholy bez K_n, E_n . Q.E.D.

Věta: $\forall r \in \mathbb{N} \, \forall n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N} \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall c : E(K_n) \to \{1, \dots, r\} \, \exists i_0 \in \{1, \dots, r\} \, \exists U \subseteq V(K_n) \, \forall u_1, u_2 \in U : c(\{u_1, u_2\}) = i_0 \wedge |U| \geq n_{i_0}$

Česky: Pro každé $r \in \mathbb{N}$ a všechny *r*-tice $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ existuje přirozené číslo *N*, že pro libovolné obarvení *c* hran grafu K_n pomocí *r* barev existuje barva i_0 a podmnožina vrcholů *U* taková, že hrana mezi každými dvěma jejími vrcholy má barvu i_0 a počet vrcholů je alespoň n_{i_0} . Uf.

Důkaz: Označme minimální takové *N* jako $R(n_1, \dots, n_r), R_r(n)$.
Dokážeme $R(n_1, \dots, n_r) \leq 1 + \sum_{i=1}^{r} R(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots n_r)$
indukcí dle $\sum_{i=1}^{r} n_i$:

(1) $n_1 = \dots = n_r = 1$ stačí $N = 1$ (existuje-li *i*, aby $n_i = 1 \Rightarrow N = 1$, triviální)
Tedy dále platí $\forall i : n_i \geq 2$.
Ať *v* je libovolný vrchol, $V_i = \{u \in V; n \neq r, c(\{u, v\}) = i\}$.
$|V_i| \geq R(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_r)$, použijeme I.P:

$\exists i_0 \exists U \subseteq V_i:\ i_0 \neq i \Rightarrow n_{i_0} =$ i-tému z $(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_r)$ $i_0 = i \Rightarrow U' = U \cup \{v\}$ ... Q.E.D. ?!

Věta: $\forall n, r, p \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall X, |X| \geq N\ \ \forall c: \binom{X}{p} \to \{1, \dots, r\}\ \exists i_0 \in \{1, \dots, r\}\ \exists Y \subseteq X, |Y| \geq n:\ c\binom{Y}{p} \equiv i_0$

Česky: Pro libovolná přirozená čísla *n, r, p* existuje *N* takové, že na libovolné množině *X* o velikosti *N* pro *c* libovolné obarvení *p*-tic jejích prvků *r* barvami existuje barva i_0 taková, že pro ni najdeme *Y* podmnožinu *X* velikosti alespoň *n* takovou, že na ní *c* je konstantně rovno barvě i_0.

Věta: Nekonečná verze předchozí.

$$\forall r, p \in \mathbb{N}\ \forall X \text{ nekonečnou } \forall c: \binom{X}{p} \to \{1, \dots, r\}\ \exists i_0 \in \{1, \dots, r\}\ \exists Y \subseteq X \text{ nekonečná} : c \wedge \binom{Y}{p} \equiv i_0$$

Česky: Pro libovolná přirozená čísla *r, p* a pro libovolnou nekonečnou množinu *X* a pro *c* libovolné obarvení *p*-tic jejích prvků *r* barvami existuje barva i_0 taková, že najdeme *Y* nekonečnou podmnožinu *X*, že *c* parcializováno na *Y* je konstantně rovno i_0.

Důkaz: Indukcí dle *p*.

(1) $p=1$: $c: X \to \{1, \dots, r\}$ triviální.

(2) $p \geq 2$: $X = \{x_1, \dots\}$ spočetná,

x_1: $c': \binom{X \setminus \{x_1\}}{p-1} \to \{1, \dots, r\}$ tak, že

$c'(\{y_2, \dots, y_p\}) = c(\{x_1, y_2, \dots, y_p\})$.

Existuje $Y_1 \subseteq X \setminus \{x_1\}$ nekonečná, že $c' \wedge \binom{Y_1}{p-1} \equiv c_1$.

$x_2 \in Y_1$: $c'': \binom{Y_1 \setminus \{x_2\}}{p-1} \to \{1, \dots, r\}$: $c''(\{y_2, \dots, y_p\}) = c(\{x_2, y_2, \dots, y_p\})$

Existuje $Y_2 \subseteq Y_1 \setminus \{x_2\}$ nekonečná, že $c'' \wedge \binom{Y_2}{p-1} \equiv c_2$. A tak dále:

$x_i \in Y_{i-1}$: $c^{(i)}: \binom{Y_{i-1} \setminus \{x_i\}}{p-1} \to \{1, \dots, r\}$: $c^{(i)}(\{y_2, \dots, y_p\}) = c(\{x_i, y_2, \dots, y_p\})$

Existuje $Y_i \subseteq Y_{i-1} \setminus \{x_i\}$ nekonečná, že $c^{(i)} \wedge \binom{Y_i}{p-1} \equiv c_i$.

Tím dostáváme nekonečnou posloupnost $x_1, x_2, \dots$ takovou,

že $\forall i\ \ \forall j_p > j_{p-1} > \dots > j_2 > i$: $c(\{x_i, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}\}) = c_i$.

$\exists i_0$ takové, že pro nekonečnou $I \subseteq N$: $c_i = i_0$ a $Y = \{x_i; i \in I\}$.

Potom $c \wedge \binom{Y}{p} = i_0$ a *Y* je nekonečná. Q.E.D.

Pozn.: Odhady Ramseyových čísel

Erdös-Szekeres (1935): $R(m+1, n+1) \leq \binom{m+n}{m}$; $R(n) \leq \binom{2 \cdot n-2}{n-1}$

Rödl (1986): $R(n) \leq c_1 \cdot \dfrac{\binom{2 \cdot n-2}{n-1}}{(\log(2 \cdot n-2))^{c_2}}, c_1, c_2 > 0$

Thomason: $R(n) \leq \dfrac{\binom{2 \cdot n-2}{n-1}}{\sqrt{n}}$

dolní odhad: $R(n) \geq \dfrac{\sqrt{2}}{e} \cdot n \cdot 2^{\frac{n}{2}}$

Věta: Erdös-Szekeres

$\forall k \in \mathbb{N}\ \ \exists N \in \mathbb{N}$ takové, že libovolná *N*-prvková množina bodů v rovině v obecné poloze (žádné tři neleží na přímce) obsahuje *k* bodů v konvexní poloze.

Důkaz: Indukcí dle *k*.

(1) $k=4$: stačí $N=5$.

Pokud je konvexní obal pěti bodů 4 nebo 5-úhelník, OK.
Pro 3-úhelník: ...

(2) $k>4$: buď *X* množina vodů (v obecné poloze) a

buď *c* obarvení $\binom{X}{4} \to$ konvexní / nekonvexní čtveřice.

$\exists Y \subseteq X$: $|Y| = k \wedge \binom{Y}{4}$ stejného typu, dle (1) konvexní, tedy *Y* je konvexní.

Sporem, triangulujeme *y* bodů, je-li bod v trojúhelníku, spolu s ním tvoří čtveřici, která není konvexní. $N \geq R(p=4, r=2, k)$. Q.E.D.

Věta: Schur

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall c: \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, r\}\ \ \exists x, y \in \{1, \dots, N\}, x \neq y:\ c(x) = c(y) = c(x+y)$$

Důkaz: $N := R(2, r, 3)$

Položíme $c': \binom{\{1, \dots, N\}}{2} \to \{1, \dots, r\}$: $c'(\{i, j\}) = c(|i-j|)$.

Najdeme $\alpha < \beta < \gamma$: $c'(\{\alpha, \beta\}) = c'(\{\alpha, \gamma\}) = c'(\{\beta, \gamma\}) = c_0$ a

$x = \beta - \alpha$, $y = \gamma - \beta$. Potom platí, že

$c(x) = c'(\{\alpha, \beta\}) = c_0$; $c(y) = c'(\{\beta, \gamma\}) = c_0$; $c(x+y) = c'(\{\alpha, \gamma\}) = c_0$

Ale může nastat $x = y \Rightarrow$ budeme hledat čtveřice, $N := R(2, r, 4)$ a pro $x = y$ použijeme $y' = \delta - \beta$. Q.E.D.

Věta: $\forall k \in \mathbb{N}\ \ \exists G_k$ bez trojúhelníků takový, že $\chi(G_k) \geq k$.

Důkaz: $k > 3$

Položíme X: $|X| = R(2, k, 3)$, $V(G_k) = \binom{X}{2}$ a

$E(G_k) = \{\{\{u,v\},\{x,y\}\}; u<v=x<y\}$.

G_k nemá trojúhelník, sporem: $\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\{x_3,y_3\}$,

BÚNO $x_i < y_i$, $x_1 \le x_2 \le x_3$.

$x_1 < \underline{y_1 = x_2} < y_2$; $\underline{x_2} < y_2 = \underline{x_3} < y_3$; $x_1 < \underline{y_1 = x_3} < y_3$

$\Rightarrow x_2 = x_3 \wedge x_2 < x_3$, *SPOR*.

$\chi(G_k) = ?$ Buď *c* libovolné obarvení,

$\exists z_1 < z_2 < z_3 \in X$, že $v_1 = \{z_2, z_3\}$, $v_2 = \{z_1, z_3\}$, $v_3 = \{z_1, z_2\}$.

Pak $\{v_1, v_3\} \in E \Rightarrow c(v_1) = c(v_2)$. Tedy $\chi(G_k) > k$.

To by mělo být všechno. Pokud najdete nějaké chyby, prosím oznamte mi je obratem na zaantar@gmail.com, pomůžete sobě, mně i všem ostatním, co výpisky užívají. Také se na mě obraťte v případě jakýchkoliv requestů na případné chybějící části apod. Zaantar.