1 Rekurentní jevy

Značení 1.1 (posloupnost výsledků pokusu). Mějme posloupnost opakovaných (i závislých) pokusů, kde každý má tutéž konečnou nebo spočetnou množinu výsledků $\{E_1, E_2, ...\}$.

Pak $\{E_{j_1}, ..., E_{j_n}\}$ značí *jev*, že i-tý pokus skončil E_{j_i} pro $i \in \{1, n\}$.

Definice 1.2 (jev v posloupnosti pokusů)**.** Nechť pro všechny konečné posloupnosti výsledků platí

(a) $P(E_{j_1}, ..., E_{j_{n-1}}) = \sum_{j_n=1}^{\infty} P(E_{j_1}, ..., E_{j_{n-1}}, E_{j_n})$ pro $1 < n < \infty$

(b) O každé posloupnosti lze rozhodnout, zda má či nemá vlastnost ξ.

Pak řekneme, že ξ *nastává na n-tém místě posloupnosti* $E_{j_1}, E_{j_2}, ...$, pokud posloupnost $\{E_{j_1}, ..., E_{j_n}\}$ má vlastnost ξ.

Definice 1.3 (rekurentní jev)**.** Vlastnost ξ je *rekurentní jev*, pokud ξ nastal na n-tém a $(n+m)$-tém místě $\{E_{j_1}, ..., E_{j_{n+m}}\}$. Pak platí $P(E_{j_1}, ..., E_{j_{n+m}}) = P(E_{j_1}, ..., E_{j_n}) \cdot P(E_{j_{n+1}}, ..., E_{j_{n+m}})$

Definice 1.4 (výskyt v n-tém pokusu)**.** Pro rekurentní jev ξ definujeme pro $1 \leq n < \infty$ posloupnosti

1. $\{u_n\}$, kde $u_n = P(\xi$nastane v n-tém pokusu)
2. $\{f_n\}$, kde $f_n = P(\xi$nastane v n-tém pokusu poprvé)

Speciálně definujeme $u_0 := 1, f_0 := 0$. Pak f_n tvoří rozdělení pravděpodobnosti, u_n ale ne.

Poznámka 1.5 (vztah f_n a u_n). Pokud ξ nastal v kroku n, musel někdy nastat poprvé. Pokud to bylo v k-tém kroku, lze uvažovat, že ξ nastal na konci posloupnosti délky $n - k$. Pak platí (dle věty o úplné pravděpodobnosti) pro $n \geq 1$:

$$u_n = f_1 \cdot u_{n-1} + f_2 \cdot u_{n-2} + ... + f_n \cdot u_0$$

Což je konvoluce bez prvního členu (proto jsme dodefinovali u_0 a f_0).

Poznámka 1.6 (vytvořující funkce rekurzivních jevů). Vytvořující funce $\{u_n\}$ je $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot x^n$, vytvořující funkce $\{f_n\}$ je $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n$.

Pro $n > 0$ můžeme zapsat rovnice tvaru $u_n = f_0 \cdot u_n + f_1 \cdot u_{n-1} + f_2 \cdot u_{n-2} + ... + f_n \cdot u_0$. Ty vynásobíme x^n, sečteme je po sloupcích a dostaneme $U(x) = u_0 \cdot x^0 + U(x) \cdot F(x)$. Platí tedy následující věta:

Věta 1.7.

$$U(x) - 1 = F(x) \cdot U(x) \ \textit{resp.}\ F(x) = \frac{U(x) - 1}{U(x)} \ \textit{resp.}\ U(x) = \frac{1}{1 - F(x)}.$$

Poznámka 1.8. $\{f_n\}$ udává rozdělení náhodné veličiny T_1, která popisuje čekání na první výskyt ξ. Pokud $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n < 1$, potom T_1 je *nevlastní* náhodná veličina ($T_1 = \infty$) a pravděpodobnost, že jev nenastal, je $1 - f$.

Definice 1.9 (doba návratu)**.** Mějme nezávislé náhodné veličiny $T_i, 1 \leq i \leq r$ se stejným rozdělením $\{f_n\}$.

T_i interpretujeme jako *dobu návratu*, tedy počet pokusů mezi $(i-1)$-ním a i-tým výskytem.

Pak $T^{(r)} = \sum_{i=1}^{r} T_i$ je *doba čekání na r-tý výskyt.*

Značení 1.10 (pravděpodobnost r-tého návratu). Značíme $f_n^{(r)} = P(\xi$nastane po r-té v n-tém pokusu). Speciálně $f_0^{(r)} := 0$.

Věta 1.11 (vytvořující funkce pro r-tý návrat)**.** *Pro rekurentní jevy lze vytvořující funkci r-tých návratů spočítat jako r-tou mocninu vytvořující funkce prvních návratů, tedy* $\{f_n^{(r)}\} = \{f_n\}^{r\star}$.

Důkaz. Pro $r = 2$ podobně jako v předchozí větě. Uvažujeme, že $f_n^2 = f_0 f_n + f_1 f_{n-1} + ... + f_n f_0$ (pokud jev poprvé nastal v kroku k, lze uvažovat, že nastal poprvé také na konci posloupnosti délky $n - k$). Což je úplná konvoluce pro $n \leq 0$. Vzniklé rovnice vynásobíme x^n a sečteme po sloupcích, což dá požadovaný výsledek. Pro $r > 2$ plyne indukcí. □

Věta 1.12. *Pravděpodobnost, že rekurzivní jev nastane v nekonečné posloupnosti alespoň r-krát, je f^r, kde $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.*

Poznámka 1.13 (chování $f_n^{(r)}$). Funkce r-tých návratů se chová podobně jako součet nezávislých náhodných veličin - jde vlastně o nezávislé náhodné veličiny $T_1, T_2, ...$, které představují doby mezi návraty jevu. Po nastání jevu zapomínám předchozí pokusy. Proto se doba čekání na r-tý výskyt ξ dá popsat náhodnou veličinou $T^{(r)} = \sum_{i=1}^{r} T_i$, viz. 1.9.

1.1 Klasifikace rekurentních jevů

Definice 1.14 (trvalý a přechodný rekurentní jev)**.** Rekurentní jev ξ je

(a) *trvalý*, pokud $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$,

(b) *přechodný*, pokud $f < 1$.

Poznámka 1.15.

- ξ je trvalý, pak $P(\xi$ nastane v nekonečné posloupnosti pokusů $\infty\times) = 1$.
- ξ je přechodný, pak
  - $P($—"—$) = 0$.
  - $u = \sum_{n=0}^{\infty} < +\infty$ a také $f = \frac{u-1}{u}$ (viz vytvořující funkce F, U).

Definice 1.16 (Střední doba návratu)**.** Pro trvalý jev ξ označíme $\mu = \mathbf{E}T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_n$ za *střední dobu návratu* ξ.

Definice 1.17. Pokud $\mu < +\infty$, jev ξ označujeme za *nenulový*, pokud $\mu = +\infty$, za *nulový*.

Definice 1.18. Rekurentní jev ξ je *periodický*, právě když $\exists \lambda > 1 \forall n, \lambda \nmid n : u_n = 0$.
Největší takové λ se nazývá *perioda jevu* ξ.

1.2 Příklady

Definice 1.19 (Náhodná procházka po přímce)**.** Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, ... \sim Alt(p)$. *Jednoduchá náhodná procházka* s pravděpodobností zdaru p je potom posloupnost $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Příklad 1.20 (Náhodná procházka po přímce)**.** Mějme jednoduchou náhodnou procházku po přímce s $p = \frac{1}{2}$. V čase n nastává ξ návrat do počátku, jestliže $S_n = 0$ (tedy počet zdarů a nezdarů je v n-tém kroku stejný). Ukážeme, že ξ je periodický jev trvalý pro $p = \frac{1}{2}$ a přechodný jinak.

Řešení. Zřejmě $u_{2n+1} = 0$ (v lichém kroku se nelze vrátit) a $u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \sim Bi(2n, p)$ ($n\times$ tam, $n\times$ zpět). ξ je tedy periodický jev.

Poznámka 1.21. Využíváme *Stirlingovu formuli*: $n! \approx n^n \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi n}$.
Pak $\binom{2}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)^{2n}}{n!n!} = \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-4n} \cdot \sqrt{4\pi n}}{n^n \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi n}} = \frac{2^{2n} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.
TO BE DONE □

Příklad 1.22 (Náhodná symetrická procházka po čtvercové síti). $p = \frac{1}{4}$. Chceme opět znát u_n. Zafixujeme si počet kroků v jednom směru jako i, ostatní z něj plynou (pro u_{2n} to činí i kroků v opačném směru a $n-i$ v obou zbývajících). Potom

$$u_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \cdot \frac{1}{4^{2n}} \approx \frac{1}{\pi n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$$

Jde tedy o periodický trvalý rekurentní jev.

Příklad 1.23 (Náhodná symetrická procházka ve třech rozměrech). Musíme zafixovat dva směry, stále multinomické rozdělení, již přechodný jev.

TODO příklad s hodem mincí a výpočtem u_n, f_n

1.3 Limitní věta

Věta 1.24. *Nechť ξ je rekurentní neperiodický jev. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

Poznámka 1.25. μ značí střední dobu návratu ξ, viz 1.16.

Pro *nulový* rekurentní jev je $\mathbf{E}T_1 = \infty$.

Věta 1.26. *Nechť ξ je rekurentní trvalý periodický jev s periodou λ. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} u_{\lambda n} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

1.4 Asymptotické rozdělení četnosti rekurentních jevů

Věta 1.27. *Nechť rekurentní jev ξ je trvalý. Označíme N_n počet výskytů do času n a $T^{(r)}$ dobu čekání na r-tý výskyt ξ. Potom jevy $[N_n \geq r]$ a $[T^{(r)} \leq n]$, $1 \leq r \leq n < \infty$ jsou ekvivalentní. Předpokládejme dále, že rozdělení dob prvních návratů má konečnou střední hodnotu $\mathbf{E}T_1 = \mu$ a konečný rozptyl $varT_1 = \sigma^2$. Potom $N_n \sim \mathcal{N}(\frac{n}{\mu}, \frac{n\sigma^2}{\mu^3})$ a platí*

$$\lim_{r\to\infty} P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sigma\sqrt{r}} \leq r\right) = \Phi(y), y \in \mathbb{R}_1$$

1. $T^{(r)} = \sum_{i=1}^{r} T_i$
2. $\mathbf{E}T^{(r)} = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{r} T_i) = r \cdot \mathbf{E}T_1 = r\mu$

   $var(T^{(r)}) = var(\text{—''—}) = r \cdot varT_2 = r\sigma^2$
3. $[N_n \geq r] = [T^{(r)} \leq n]$, $1 \leq r \leq n < \infty$
4. Připomenutí - centrální limitní věta: Mějme $X_1, X_2, ...$ nezávislé náhodné proměnné s rozdělením $\mathbf{E}X_1 = \mu$ a rozptylem $varX_1 = \sigma^2 < \infty$.

   Pak $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right) \to_{x\to\infty} \Phi(x)$.
5. $N_n \sim \mathcal{N}(\frac{n}{\mu}, \frac{n\sigma^2}{\mu^3})$ - prý "kouknu a vidím".

   $\mathbf{E}N_n \approx \frac{n}{\mu}$ (viz další věta)

   Rozptyl není jasný, musí se *uhodnout.*
6. $P(N_n \geq r) \to_{r\to\infty} \Phi\left(\frac{n-r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}}\right)$

7.
$$P(T^{(r)} \leq x) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} T_i - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}} \leq \frac{x - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}}\right) \to_{xto\infty} \Phi\left(\frac{x - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}}\right)$$

Věta 1.28. *Nechť rekurentní jev ξ je trvalý a nenulový. Potom pro $n \to \infty$ platí $\mathbf{E}N_n \approx \frac{n}{\mu}$, kde μ je střední doba návratu.*

1.5 Rovnice obnovy

Poznámka 1.29. Limitní věty předchozích odstavců lze považovat za speciální případy určité obecné věty, kterou lze formulovat analyticky bez použití pravděpodobnostních pojmů. Jak uvidíme, i tato obecná věta má pravděpodobnostní význam.

Definice 1.30 (rovnice obnovy)**.** Nechť $a_0, a_1, ...$ a $b_0, b_1, ...$ jsou dvě posloupnosti takové, že $a_0 = 0$, $a_n \in [0, 1]$, $b_n \leq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$.

Položme $u_n = b_n + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + ... + a_n u_0$, tj.

$$\{u_n\} = \{b_n\} + \{a_n\} \star \{u_n\}$$

Tento vztah se nazývá *rovnicí obnovy.*

Poznámka 1.31. Platí $U(x) = B(x) + A(x)U(x) \equiv U(x) = \frac{B(x)}{1-A(x)}$.

Definice 1.32. Posloupnost $\{a_n\}$ nazveme *periodickou*, pokud existuje $\lambda > 1$ tak, že $\forall n, \lambda \nmid n : a_n = 0$. Největší takové λ nazveme *periodou.*

Věta 1.33. *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je neperiodická. Potom platí:*

1. *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.*
2. *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tzn. $\{a_n\}$ lze považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého neperiodického rekurentního jevu ξ, potom*
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n}{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n} & \sum_{n=1}^{\infty} n a_n < \infty \\ 0 & \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \infty \end{cases}$$
3. *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 1$, potom pro $n \to \infty$ je $u_n \approx \frac{B(x)}{x^{n+1} \cdot A'(x)}$, kde $x < 1$ je jediný kořen rovnice $A(x) = 1$.*

Věta 1.34. *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je periodická s periodou λ. Potom platí:*

1. *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.*
2. *Je-li $\mu = \infty$, potom $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*
3. *Je-li $\mu < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tj. $\{a_n\}$ lze považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého periodického rekurentního jevu ξ. Potom pro $0 \leq j < \lambda$ platí*
$$\lim_{n\to\infty} u_{n\lambda+j} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\lambda+j}}{\mu}$$
a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu}$$

TODO výklad, poznámky k celé sekci

2 Markovovy řetězce

Příklad 2.1 (Motivace). Máme rubikovu kostku, náhodně s ní otáčíme. Jak dlouho bude trvat, než se vrátíme do sestaveného stavu? Mohu náhodné otáčení stěnami rubikovy kostky popsat jako náhodnou procházku? Pokud ano, po jaké struktuře?

6 stěn, lze točit tam a zpět $\Rightarrow$ 12 možností. Celkem konečně mnoho stavů, každý má 12 sousedů.

$\mathbb{P}$	E_1	$\ldots$	E_n
E_1	0		
$\vdots$		$\ddots$	
E_n			0

$p_{i,j} = P(\text{přechod } E_i \to E_j) \Rightarrow$ na každém řádku bude $12 \times {}^1/_{12}$. E_i jsou všechny stavy RK.

Jsou průchody stavem E_1 rekurentním jevem? $\Rightarrow$ ano.

Zajímá nás $\mathbf{E}(E_i \to E_1)$.

Definice 2.2 (Markovův řetězec)**.** Posloupnost pokusů, z nichž každý má tu samou konečnou nebo spočetnou množinu možných výsledků $E_1, E_2, ...$, nazveme *Markovovým řetězcem* (MŘ), jestliže pravděpodobnost každé konečné posloupnosti výsledků (pokusů nultého až n-tého) je dána vztahem

$$P(E_{j_0}, ..., E_{j_n}) = a_{j_0} \cdot p_{j_0,j_1} \cdot p_{j_1,j_2} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1},j_n}$$

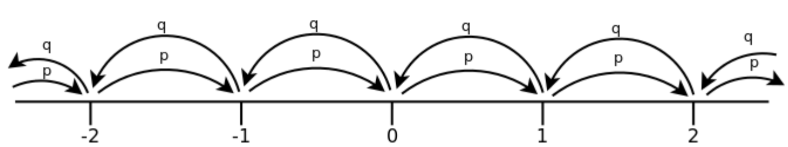
kde a_k ($k \in \mathbb{N}$) jsou pravděpodobnosti výsledků nultého pokusu a $p_{j,k}$ ($j, k \in \mathbb{N}$) je pro všechny pokusy stejná podmíněná pravděpodobnost výsledku E_k za podmínky výsledku E_j v pokuse předchozím ($P(E_j \to E_k) = P(E_k|E_j)$).

Značení 2.3. MŘ budeme popisovat $(\mathbb{P}, \mathbb{a})$, kde $\mathbb{P} = (p_{i,j})$ je čtvercová matice s (podmíněnými) pravděpodobnostmi přechodu (prvního řádu) $p_{i,j} = P(E_i \to E_j)$ a $\mathbb{a} = (a_i)$ je počáteční rozdělení pravděpodobností.

Poznámka 2.4. Všimněte si, že $\mathbb{P}$ je *stochastická matice*, tedy platí $\forall i : \sum_j p_{i,j} = 1$.

Je dobré si vždy namalovat graf MŘ...

Příklad 2.5 (malá/velká). E_i bude značit stav mojí kapsy. $X_i = \begin{cases} +1 & ...p \\ -1 & ...q \end{cases}$, $E_i = \begin{cases} \to E_{i+1} & ...p \\ \to E_{i-1} & ...q \end{cases}$.

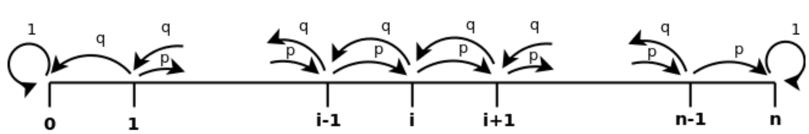


$\mathbb{P}$ bude nekonečná matice:

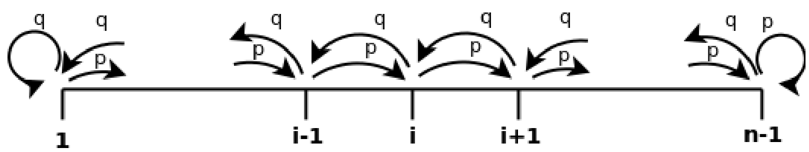
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & q & 0 & p & & \\ & & q & 0 & p & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Začínáme vždy ve stavu E_0, takže $\mathbb{a} = (..., 0, ..., 0, \underbrace{1}_{=a_0}, 0, ..., 0, ...)$

Příklad 2.6 (náhodná procházka s pohlcující bariérou). Podobně jako v předchozím případě, s tím rozdílem, že při dosažení krajního stavu v něm zůstanu.



Příklad 2.7 (náhodná procházka s odrážející bariérou). Podobně jako v předchozím případě, s tím rozdílem, že namísto přechodu do krajního stavu zůstávám na místě.



Příklad 2.8 (sběratel kupónů).

Příklad 2.9 (Ehrenfestův myšlený pokus).

Příklad 2.10 (volby).

Příklad 2.11 (ALOHA protokol).