Matematická analýza II

látka z

II. semestru informatiky MFF UK
podle přednášek Roberta Šámala

Zpracovali:

Jan „Zaantar“ Štětina,
Ondřej „Keddie“ Profant
a další

Obsah

Legenda: klíčové pojmy, definice, těžké věty, lehké věty, věty bez důkazu

Věta: **Jensenova nerovnost**

Mějme $f: J \to \mathbb{R}$, J interval, f konvexní, $x_1, \dots, x_n \in J$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Pak $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(x_i)$.

Věta: **AG-nerovnost**

Mějme $x_1, \dots, x_n \ge 0$, pak $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$

Taylorův polynom

Def: Nechť $f: D_f \to \mathbb{R}$,
$a, x \in D_f$, $n \in \mathbb{N}$.

Pak **Taylorův polynom** je $T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{\overbrace{(n)}^{\text{n-tá derivace}}}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$.

Tvrz.: Platí, že $(T_n^{f,a}(x))' = f'(a) + f''(a)\cdot(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\cdot(x-a)^{n-1} = T_{n-1}^{f',a}(x)$.

Důsl.: $f(x)$ a $T_n^{f,a}(x)$ mají stejnou $1, \dots, n$-tou derivaci v bodě $x = a$.

Věta: **Taylorův polynom je nejlepší**
Mějme f spojitou funkci,
P polynom.

Pak platí ekvivalence $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P(x) = T_n^{f,a}(x)$.

Pozn., $\lim_{x \to a} \frac{(f(x) - P(x)) - \overbrace{(f(a) - P(a))}^{=0}}{x-a} = f'(a) - P'(a)$.

Věta: **Zbytek Taylorova polynomu**
Nechť f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci na $[a, x]$.

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-a)^{n+1}$.

Pozn., (1) $\sin x = T_4^{\sin,0}(x) + \text{chybový člen} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\overbrace{(\sin\xi)}^{|\ldots|\le 1}{}^5}{5!}\cdot x^5$, tedy $\sin(0{,}1) = \underbrace{0{,}1 - \frac{0{,}1^3}{6}}_{0{,}0998\overline{3}}$ s chybou $\le \frac{1}{24}\cdot 0{,}00001$.

(2) Taylorův polynom pro $a = 0$ se nazývá MacLaurinův polynom

(3) Varování: Existují funkce takové, že $\underbrace{f(x) \neg\equiv 0}_{\text{není konstantní } 0}$ a $\forall n: f^{(n)}(0) = 0$. Pro tyto funkce Taylorův polynom nefunguje.

(4) Často (pokud $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ je omezená) platí $f(x) = T_n^{f,a}(x) + O((x-a)^{n+1})$.

Vždy platí $f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n)$, $\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \to a} 0$.

Věta: **Lagrangeova o střední hodnotě** (opakování)
Nechť f je funkce spojitá na $[a, b]$ a
f' existuje na (a, b).

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Věta: **Cauchyho o střední hodnotě**
Nechť f, g jsou funkce spojité na $[a, b]$ a

f', g' existují a $g' \neq 0$ na (a, b).

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Primitivní funkce

Úvod: (1) $f(t)$ …poloha v čase t $\overbrace{\Rightarrow}^{\text{snadné}}$ $f'(t)$ …rychlost v čase t

ale $\underbrace{\Leftarrow}_{?}$

nebo např. okamžitý průtok $\Rightarrow$ objem vody v bazénu

(2) výpočet plochy, např. $\sin x \in (0,\pi)$

K zamyšlení: $\exists f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ taková, že při „samplování“ (viz. obrázek) vyjde 0, ale „mělo by“ vyjít 1?
[obrázek]

$$\approx h\cdot\sin h + h\cdot\sin 2h + h\cdot\sin 3h + \ldots + h\cdot\sin nh = h(\sin h+\ldots+\sin nh) = h\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}h-\cos(n+\frac{1}{2})h}{2\cdot\sin\frac{1}{2}h}\overbrace{\rightarrow}^{h\rightarrow 0}2$$

Tedy plocha pod křivkou je 2. Vážně? - Definice, typ samplování, … ($\Rightarrow$ Riemannův integrál)

Jiná úvaha:
[obrázek]
Jak rychle „přibývá“ obsah při posunu vpravo?

Def.: Mějme $f: I\rightarrow\mathbb{R}$, $I\subseteq\mathbb{R}$ otevřený interval. Řekneme, že F je **primitivní funkce** k f, pokud pro všechna $x\in I$ platí $F'(x)=f(x)$.

Pozn., přejít od F k F' je snadné, naopak ne a není to ani vždy možné.
Například primitivní funkci k e^{-x^2} nelze vyjdřit vzorcem.

☼: $F(x)$ je pf. k $f(x) \Rightarrow F(x)+c$ je pf. k $f(x)$ pro všechna $c\in\mathbb{R}$.
Důkaz: $(F(x)+c)'=F'(x)+0=f(x)$

Věta: **5.1, o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu**
Nechť $F(x), G(x)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ na otevřeném intervalu I.
Pak existuje $c\in\mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x\in I$ platí $G(x)=F(x)+c$.

Pozn., Najdeme jednu primitivní funkci $\Rightarrow$ máme všechny.
Důkaz: Víme, že $\forall x\in I: F'(x)=f(x), G'(x)=f(x)$.
Položíme $H(x)=G(x)-F(x)$
$H'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0 \Rightarrow H(x)$ je konstantní, tedy $H(x)=c, c\in\mathbb{R}$ a $G(x)=F(x)+c$. Q.E.D.

Znač.: Integrál $\int f(x)\cdot dx=\{F(x); F(x)\text{ je primitivní funkce k } f(x)\}=\{F(x)+c; c\in\mathbb{R}\}=F(x)+c$.

Věta: **5.2, o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce**
Nechť I je otevřený interval a f spojitá funkce v I. Pak f má primitivní funkci.
Důkaz: plyne zřejmě z věty 6.9.

Př.: e^{-x^2} spojitá na $\mathbb{R}$, tedy existuje pf. Ovšem nelze ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.
Místo $\int e^{-x^2}$ se zavádí $Erf(t)$.

Pozn., (1) funkce $sgn(x)$ nemá primitivní funkci
a obecně pokud $\underbrace{f(x)}_{=F'(x)}$ má $\underbrace{\text{pf}}_{=F(x)}$, pak $f(x)$ nabývá mezihodnot (Darboux).
(2) $F'=f \Rightarrow F$ má vlastní derivaci $\Rightarrow F$ je spojitá.
(3) $f(x)$ nemusí být spojitá.

Věta: **5.3, linearita primitivní funkce**
Nechť $f(x)$ má pf. $F(x)$ a $g(x)$ má pf. $G(x)$ na otevřeném intervalu I, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Pak $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ má na I pf. $\alpha\cdot F+\beta\cdot G$.
Důkaz: $(\alpha\cdot F+\beta\cdot G)'=\alpha\cdot F'+\beta\cdot G'=\alpha\cdot f+\beta\cdot g$, Q.E.D.

Př.:

(1) $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, kde $n \neq -1$, tedy pro $x \in \mathbb{R} \ldots n \geq 0$ a $x \in (-\infty, 0), (0, +\infty) \ldots n < -1$,

(2) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + c$ pro $x \in (-\infty, 0), (0, \infty)$,

(3) $\int e^x = e^x + c$ pro $x \in \mathbb{R}$,

(4) $\int \sin x = -\cos x + c$ pro $x \in \mathbb{R}$,

(5) $\int \cos x = \sin x + c$ pro $x \in \mathbb{R}$,

(6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + c$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$,

(7) $\int \frac{-dx}{\sin^2 x} = cotg\, x + c$ pro $x \in (0, \pi) + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$,

(8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + c$ pro $x \in \mathbb{R}$,

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \arcsin x + c$ pro $x \in (-1, 1)$.

Př.: $\int x^2 + e^x + 2 \cdot \cos x\, dx = \int x\, sup2 + \int e^x + 2 \cdot \int \cos x = \frac{x^3}{3} + e^x + 2 \cdot \sin x + c$

Věta: **5.4, o substituci při výpočtu primitivní funkce**

1. Nechť F je pf. k f na (a, b), $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a $\forall\, x \in (\alpha, \beta)\ \ \exists \varphi'(x)$.
   Pak $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = F(\varphi(t)) + c$ na (α, β). ($(\alpha, \beta) \xrightarrow{\varphi} (a, b) \xrightarrow{f, F} \mathbb{R}$)
2. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je surjektivní (na), $\forall\, x \in (\alpha, \beta)\ \ \exists \varphi'(x), \varphi'(x) \neq 0$,
   $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = G(t)$ na (α, β).
   Pak $\int f(x) \cdot dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c$ na (a, b).

Důkaz: (1) $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ (derivace vnořené funkce)

(2) φ je na $\Rightarrow \varphi$ je monotonní $\Rightarrow \forall x \in (\alpha, \beta) : \varphi'(x) \neq 0$ (tedy neexistují $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) : \varphi'(x_1) > 0 \wedge \varphi(x_2) < 0$)

Tedy platí: $(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \underbrace{=}_{(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}} \underbrace{f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x))}_{\text{předp.} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = G(t);\ t := \varphi^{-1}(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$, Q.E.D.

Př.: $\int \sin(2 \cdot x) \cdot dx$ **...** $= -\frac{1}{2} \cos 2 \cdot x + c$

$f(x) = \sin x$ **...** $F(x) = -\cos x$

$\varphi(t) = 2 \cdot t$ **,** $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, +\infty)$

$\sin(2 \cdot t) \cdot 2 \cdot dt = -\cos(2 \cdot t) + c$

Př.: $\int t \cdot e^{-t^2} = *$

Víme $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = F(x) = \underbrace{\int f(x)}_{\text{subst.} x = \varphi(t)} \cdot dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\frac{d\, \varphi(t)}{dt}}_{= \varphi'} \cdot dt$

$x = -t^2$, $\frac{dx}{dt} = -2 \cdot t$, $dx = -2 \cdot t \cdot dt \Rightarrow dt = -\frac{1}{2 \cdot t} \cdot dx$

$* = \int e^x \cdot t \cdot \frac{dt}{-2 \cdot t} = -\frac{1}{2} \int e^x = -\frac{1}{2} \cdot e^x + c = -\frac{1}{2} \cdot e^{-t^2} + c$

Věta: **5.5, integrace per partes**

Nechť I je otevřený interval, f, g spojité funkce na I, F je pf. k f na I a G je pf. k g na I.

Pak $\int F(X) \cdot g(x) \cdot dx = F(x) \cdot G(x) - \int f(x) \cdot G(x) \cdot dx$.

Důkaz: Označme $H(x)$ pf. k $f(x) \cdot G(x)$ na I, tj. na I platí $H'(x) = f(x) \cdot G(x)$.

Tvrdíme, že $F(x) \cdot G(x) - H(x)$ je pf. k $F(x) \cdot g(x)$.

$(F(x) \cdot G(x) - H(x))' = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) - H'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot G(x) = F(x) \cdot g(x)$, Q.E.D.

Př.: $\int \underbrace{x}_{F} \cdot \underbrace{e^x}_{g} = \underbrace{x}_{F} \cdot \underbrace{e^x}_{G} - \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{G} = x \cdot e^x - e^x + c = (x-1) \cdot e^x + c$

$F(x) = x \Rightarrow f(x) = 1$

$$G(x)=e^x \Leftarrow g(x)=e^x$$

Pozn., (1) někdo píše $\int f\cdot g'=f\cdot g-\int f'\cdot g$,
(2) „vzorec je symetrický“, tedy
(3) dvojí použití integrace per partes se stejnými *f, g* vede na původní integrál.

Př.:

$$I_n=\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\cdot dx$$

$$n=1: I_1=\int \frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x+c$$

$$I_n=\int \underbrace{1}_{g}\cdot\underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{F}=\frac{x}{(1+x^2)^n}-\int x\cdot\underbrace{(-n)\cdot\frac{2\cdot x}{(1+x^2)^{n+1}}}_{f(x)}=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2\cdot n\cdot\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2\cdot n\cdot(I_n-I_{n+1})$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{2\cdot n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n}+\left(1-\frac{1}{2\cdot n}\right)\cdot I_n$$

tedy $\underbrace{I_2}_{n=1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot arctg\,x+c$

Integrace racionálních funkcí

Def.: **Racionální funkce** je $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde *P, Q* jsou polynomy.

Věta: **Základní věta algebry**
Mějme polynom $P(x)=a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0$.
Pak existují $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$ taková, že $P(x)=a_n\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$.

Pozn., (1) neplatí v $\mathbb{R}$, např. $x^2+1=0$ nemá v $\mathbb{R}$ řešení,
(2) v $\mathbb{R}$ pro liché *n* existuje vždy alespoň jedno řešení.

Důsl.: Mějme $Q(x)=a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0; a_n,\ldots,a_0\in\mathbb{R}$.
Pak lze *Q* zapsat ve tvaru:

$$Q(x)=a_n\cdot(x-x_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{p_k}\cdot(x^2+\alpha_1\cdot x+\beta_1)^{q_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+\alpha_e\cdot x+\beta_e)^{q_e},$$

kde $x_1,\ldots,x_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_e,\beta_1,\ldots,\beta_e\in\mathbb{R}$,
$p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_e\in\mathbb{N}$
$x_1,\ldots,x_k$ jsou po dvou různé,
žádné dva z polynomů $x-x_1,\ldots,x-x_k,x^2+\alpha_1\cdot x+\beta_1,\ldots,x^2+\alpha_e\cdot x+\beta_e$ nemají společný kořen
pro všechna $i\in\{1,\ldots,e\}: x^2+\alpha_i\cdot x+\beta_i$ není reálný kořen.

Pozn., $Q(z)=0\Rightarrow Q(\bar{z})=0$
($(x-z)\cdot(x-\bar{z})=x^2+\alpha\cdot x+\beta$, kde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$).

Věta: **5.6, rozklad na parciální zlomky**
Nechť *P, Q* jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $deg(P)<deg(Q)$ a *Q* je ve tvaru z důsl. výše.
Pak existují jednoznačně určená čísla A_j^i, B_j^i, C_j^i taková, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^1}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{P_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}}+\overbrace{\ldots\ldots\ldots}^{\text{totéž pro } x_2,\ldots,x_k}+\frac{B_1^1\cdot x+C_1^1}{x^2+\alpha_1\cdot x+\beta_1}+\ldots+\frac{B_{q_1}^1\cdot x+C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1\cdot x+\beta_1)_1^q}+\overbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}^{\text{totéž pro}(x^2+\alpha_2\cdot x+\beta_2),\ldots,(x^2+\alpha_e\cdot x+\beta_e)}$$

Důkaz pro *Q* s *n* reálnými kořeny, tj. $Q(x)=a_n\cdot(x-x_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{p_k}$,
M.I. podle $deg(Q)$:
(1) $deg(q)=1\Rightarrow deg(P)=0\Rightarrow \begin{matrix}Q(x)=a_1\cdot(x-x_1)\\ P(x)=c\end{matrix}\Rightarrow\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha}{x-x_1}$
(2) zkusíme šikovně zvolit α,
aby na $\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{\alpha}{(x-x_1)^{p_1}}$ šel užít indukční předpoklad.
Položíme $H(x)=a_n\cdot(x-x_2)^{p_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{p_k}=\frac{Q(x)}{(x-x_1)^{p_1}}\Rightarrow H(X_1)\neq 0$
a použijeme ji k vyjádření:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{\alpha}{(x-x_1)_1^p}=\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{\frac{\alpha\cdot Q(x)}{(x-x_1)_1^p}}{Q(x)}=\frac{P(x)-\frac{\alpha\cdot Q(x)}{(x-x_1)_1^p}}{Q(x)}=\frac{P(x)-\alpha\cdot H(x)}{Q(x)}$$

Z toho plyne, že existuje $\alpha: P(x_1)-\alpha\cdot H(x_1)=0$, a to $\alpha=\frac{P(x_1)}{H(x_1)}$.
x_1 je kořen, takže ho můžeme vytknout: $P(x)-\alpha\cdot H(x)=(x-x_1)\cdot P_1(x)$
Tedy $\frac{(x-x_1)\cdot P_1(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{\underbrace{a_n\cdot(x-x_1)^{p_1-1}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{p_k}}_{\text{toto lze rozložit na parciální zlomky}}}$, indukční předpoklad.
$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{\alpha}{(x-x_1)^{p_1}}$ je lineární kombinace výrazů $\{\frac{1}{(x-x_i)^s};1\leq s\leq p_i\}$
kromě $\frac{1}{(x-x_1)^{p_1}}$. Po přidání $\frac{\alpha}{(x-x_1)^{q_1}}$ máme rozklad $\frac{P(x)}{Q(x)}$, Q.E.D.

(přednáška 18.3.08)

Postup: Jak integrovat racionální funkce

1. Část vydělíme: $\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$
2. $Q(x)$ rozložíme na $(x-x_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+\alpha_1\cdot x+\beta_1)^{q_1}$
3. Rozložíme na parciální zlomky.
4. Máme $\int\frac{P(x)}{Q(x)}=\underbrace{\int R(x)}_{\text{jednoduchý}}+\int$ parc. zlomku
5. Parciální zlomky zpracujeme: $\int\frac{1}{x-x_1}\cdot dx=\ln|x-x_1|+c$, $\int\frac{1}{(x-x_1)^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-x_1)^{n-1}}$,

$$\int\frac{A\cdot x+B}{(x^2+\alpha\cdot x+\beta)^q}\cdot dx=\underbrace{\frac{A}{2}\cdot\int\frac{2\cdot x+\alpha}{(x^2+\alpha\cdot x+\beta)^q}}_{\text{(a)}}+\underbrace{\int\frac{B-\frac{A\cdot\alpha}{2}}{(x^2+\alpha\cdot x+\beta)^q}}_{\text{(b)}}$$

(a) Platí $\forall\, x: x^2+\alpha\cdot x+\beta>0$, použijeme substituci $y=x^2+\alpha\cdot x+\beta$, $dy=(2\mathrm{x}+\alpha)\cdot dx$

Pak $\int\frac{1}{y^q}=\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{y^{q-1}}=\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{(x^2+\alpha\cdot x+\beta)^{q-1}}$

$\ln|y|=\ln|x^2+\alpha\cdot x+\beta|$

(b) $\int\frac{1}{(x^2+\alpha\cdot x+\beta)^q}$ pro $\alpha=0,\beta=1$ to vede na $I_n=\int\frac{1}{(x^2+1)^n}$, což umíme.

Jinak $x^2+\alpha\cdot x+\beta=\underbrace{(x+\frac{\alpha}{2})^2}_{x^2+\alpha\cdot x+\frac{\alpha^2}{2}}+\underbrace{(\beta+(\frac{\alpha}{2})^2)}_{k>0}=k\cdot((\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{k}})^2+1)=k\cdot(y^2+1)$

Postup: Jednoduché substituce

Nechť $R(x)$ je racionální funkce.

$\int R(e^{a\cdot x})\cdot dx=\int R(y)\cdot\frac{1}{a\cdot y}\cdot dy$

$y=e^{a\cdot x}$, $dy=a\cdot e^{a\cdot x}\cdot dx$, $dx=\frac{1}{a\cdot y}\cdot dy$

Postup: Integrace trigonometrických funkcí

$$R(x,y)=\frac{\overbrace{P(x,y)}^{\sum_{i,j\text{ kon.}} a_{i,j}\cdot x^i\cdot y^j}}{Q(x,y)}$$

$\int R(\sin x,\cos x)$ ... různé možnosti substituce:

1. $t=\sin x$
2. $t=\cos x$
3. $t=tg\ x$
4. $t=tg\frac{x}{2}$ (funguje vždy)
5. více viz. Přehled

Postup: Integrály obsahující odmocniny

$\int R(x,(\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d})^{\frac{1}{q}})\cdot dx$, kde $q\in\mathbb{N}$, $a\cdot d-b\cdot c\neq 0$

Např. $\int\frac{x+\sqrt{2\cdot x+1}}{x^2+1}\cdot dx=\int\frac{(\frac{t^2-1}{2})+t}{(\frac{t^2-1}{2})+1}\cdot t\cdot dt$

Zde $a=2,b=1,c=0,d=1,q=2$

$t=\sqrt{2\cdot x+1}$ ... $t^2=2\cdot x+1$

$x=\frac{t^2-1}{2}$, $dx=t\cdot dt$

Postup: Eulerovy stupnice

$\int R(x,\sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c})\cdot dx\,; a\neq 0$

Možnosti:

1. Kvadratický polynom má (právě) jeden reálný kořen $a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-\alpha)^2 \Rightarrow \sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c}=\sqrt{a}\cdot|x-\alpha|$ $\Rightarrow \int R(x,\sqrt{a}\cdot|x-\alpha|)$ racionální fce na $(-\infty,a),(a,+\infty)$
2. Kvadratický polynom má (právě) dva reálné kořeny $a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=a\cdot\frac{x-x_1}{x-x_2}\cdot(x-x_2)^2$
$\sqrt{(x-x_2)^2}=\sqrt{\frac{a\cdot(x-x_1)}{x-x_2}}\cdot(x-x_2)$ ...
3. Kvadratický polynom nemá žádné reálné kořeny
$\sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c}=\sqrt{a}\cdot x+t \Rightarrow a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot x^2+2\cdot t\cdot\sqrt{a}\cdot x+t^2$
$x=\frac{t^2-c}{b-2\cdot t\cdot\sqrt{a}} \Rightarrow dx=(\frac{t^2-c}{b-2\cdot t\cdot\sqrt{a}})'\cdot dt$
$\int R(x,\sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c})\cdot dx=\int R(\frac{t^2-c}{b-2\cdot t\cdot\sqrt{a}},\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{b-2\cdot t\cdot\sqrt{a}}+t)\cdot(\frac{t^2-c}{b-2\cdot t\cdot\sqrt{a}})'\cdot dt$ ... rac. funkce *t*.

Určitý integrál

Úvod: Chceme plochu pod křivkou, samplování...

Def.: **Dělení intervalu** $[a,b]$ je posloupnost $D=(x_j)_{j=0}^n$, kde $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Def.: Mějme D,D' dělení $[a,b]$. Říkáme, že D' **zjemňuje** *D*,
pokud „ $D\subseteq D'$ “, tedy pokud všechny body dělení *D* jsou i body dělení D'.

Def.: Mějme *f* omezenou funkci na $[a,b]$ a $D=(x_j)_{j=0}^n$ dělení $[a,b]$. Pak:

horní součet je $S(f,D)=\sum_{j=1}^n |x_j-x_{j-1}|\cdot\sup\{f(x);x\in[x_{j-1},x_j]\}$,

dolní součet je $s(f,D)=\sum_{j=1}^n |x_j-x_{j-1}|\cdot\inf\{f(x);x\in[x_{j-1},x_j]\}$.

Def.: **Horní Riemannův integrál** je $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\cdot dx=\inf\{S(f,D);D\text{ dělení}[a,b]\}$

Dolní Riemannův integrál je $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\cdot dx=\sup\{s(f,D);D\text{ dělení}[a,b]\}$.

Pokud $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\cdot dx=(R)\overline{\int_a^b} f(x)\cdot dx=A$, pak

Riemannův integrál je $(R)\int_a^b f(x)\cdot dx:=A$ a

říkáme, že *f* je Riemann integrovatelná.
$R([a,b])=\{\text{Riemann integr. fcí na}[a,b]\}$

Pozn., (1) *f* spojitá na $[a,b]\Rightarrow f\in R([a,b])$,
(2) $f\in R([a,b])\Rightarrow f$ je omezená.
(3) K zamyšlení: co je nejjednodušší $f\notin R([a,b])$, $\overline{\int} f=1$, $\underline{\int} f=0$?

Věta: **6.1, o zjemnění dělení**
Nechť *f* je omezená funkce na $[a,b]$, D,D' dělení $[a,b]$, D' zjemňuje *D*.
Pak $s(f,D)\le s(f,D')\le S(f,D')\le S(f,D)$.
Důkaz: Pro prostřední nerovnost triviální: $\forall M\subseteq\mathbb{R}:\inf M\le\sup M$
$s(f,D)\le s(f,D')$ lze dokázat mat. indukcí dle počtu přidaných bodů.
Máme dělení *D* a *D'* (dělení s jedním bodem navíc oproti *D*) daného intervalu.
Dle obrázku máme tedy bod *z*, který se nachází mezi jistými x_{j-1} a x_j z původního dělení *D*.

Dolní součet dělení jsme definovali takto:

$s(f,D)=\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{j-1}).inf\{f(x);x\in[x_{j-1},x_j]\}$

Z obrázku jsou patrné nerovnosti sčítanců sumy s těmito body z původního dělení a z nového:

$(x_j-x_{j-1})inf\{f(x):x\in[x_{j-1},x_j]\}\le(z-x_{j-1})inf\{f(x):x\in[x_{j-1},z]\}+(x_j-z)inf\{f(x):x\in[z,x_j]\}$

Ale tím jsme právě ukázali nerovnost mezi $s(f,D)\le s(f,D')$,
dělení se lišily právě v těchto členech posloupnosti (sčítancích sumy). Indukcí pak můžeme rozšířit na libovolné zjemňující dělení.
Pro nerovnost horních součtů dělení obdobně.
Q.E.D.

Věta: **6.2, o dvou děleních**
Nechť je *f* omezená funkce na $[a,b]$, $D_{1,}D_2$ dělení $[a,b]$.
Pak $s(f,D_1)\le S(f,D_2)$.

Důkaz: Položme *D* společné zjemnění $D_{1,}D_2$, tedy „ $D:=D_1\cup D_2$.“
Dle věty 6.1 platí $s(f,D_1)\le s(f,D)\le S(f,D)\le S(f,D_2)$, Q.E.D.

Def.: Mějme $D=(x_j)_{j=0}^n$ dělení $[a,b]$.
Pak **norma dělení** *D* je $\nu(D):=max\{|x_j-x_{j-1}|;j=1,\dots,n\}$.

Př.: $\int_0^1 x^2\cdot dx \qquad D=(x_j)_{j=0}^n;\ x_j=\frac{j}{n}$

$$s(f,D)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{j-1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot n}{n}\to\frac{1}{3}$$

$$S(f,D)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{j}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n+1)\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot n}{3}\to\frac{1}{3}\ .$$

Důsl.: Pro všechny *f* omezené na $[a,b]\in\mathbb{R}$ platí $\underline{\int} f\le\overline{\int} f$ a $\underline{\int} f=\overline{\int} f \iff f\in R([a,b])$.

Př.: $(R)\int_0^1 x^2\overbrace{=}^{?}\frac{1}{3}$ ...položíme D_n rovnoměrné dělení s krokem $\frac{1}{n}$.

$s(x^2,D_1)=\frac{1}{3}-\text{něco málo}\overbrace{\to}^{n\to\infty}\frac{1}{3}$ a $s(x^2,D_2)=\frac{1}{3}+\text{něco málo}\overbrace{\to}^{n\to\infty}\frac{1}{3}$

Věta: **6.3, aproximace Riemannova integrálu pomocí součtů**

Mějme *f* omezenou funkci $[a,b]\to\mathbb{R}$ a $(D_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost dělení takovou, že $\underbrace{\nu(D_n)}_{\text{norma dělení}}\overbrace{\to}^{n\to\infty}0$.

Potom $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\cdot dx=\inf\{S(f,D_n);n\in\mathbb{N}\}$ a $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\cdot dx=\sup\{s(f,D_n);n\in\mathbb{N}\}$.

Důkaz nebude.

Pozn.: (1) Rovnoměrné dělení $D_n:\nu(D_n)=\frac{1}{n}$ ... větu lze použít

(2) Pokud $\lim_{n\to\infty}S(f,D_n)=\lim_{n\to\infty}s(f,D_n)=A$, pak $(R)\int_a^b f(x)\cdot dx=A$.

(3) Pokud víme, že $(R)\int_a^b f(x)\cdot dx$ existuje, stačí vypočítat $\lim_{n\to\infty}S(f,D_n)$.

Věta: **6.4, kritérium existence Riemannova integrálu**
Nechť *f* je omezená na $[a,b]$.
Pak $f\in R([a,b]) \iff \forall\epsilon>0\ \ \exists D$ dělení $[a,b]$: $S(f,D)-s(f,D)<\epsilon$.

Důkaz: $\Rightarrow$ dle definice Riemannova integrálu:

$$(R)\int f=:A=\begin{cases}\underbrace{\sup}_{D}s(f,D)\dots A-\frac{\epsilon}{2}\text{ není hz.}\Rightarrow\exists D_1:s(f,D_1)>A-\frac{\epsilon}{2}\\ \underbrace{\inf}_{D}S(f,D)\dots A+\frac{\epsilon}{2}\text{ není dz.}\Rightarrow\exists D_2:S(f,D_2)<A+\frac{\epsilon}{2}\end{cases}$$

Položíme *D* společné zjemnění „ $D_1\cup D_2$ “. Pak platí dle věty 6.1:

$$A-\frac{\epsilon}{2}\underbrace{<}_{\text{z def.}\int f}s(f,D_1)\underbrace{\le}_{\text{o zjemn.dělení}}s(f,D)\underbrace{\le}_{\forall\inf\le\sup}S(f,D)\underbrace{\le}_{\dots}S(f,D_2)\underbrace{<}_{\dots}A+\frac{\epsilon}{2}$$

$\Rightarrow S(f,D)-s(f,D)<\epsilon$

$\Leftarrow$ Pro každé $\epsilon>0\ \exists D_\epsilon:S(f,D_\epsilon)-s(f,D_\epsilon)<\epsilon$ a platí

$s(f,D_\epsilon)\le\underbrace{\sup}_{D}(f,D)=\underline{\int} f\le\overline{\int} f=\underbrace{\inf}_{D}S(f,D)\le S(f,D_\epsilon)$

$\Rightarrow 0 \leq \overline{\int} f - \underline{\int} f < \epsilon (\forall \epsilon > 0) \Rightarrow \overline{\int} f - \underline{\int} f = 0 \Rightarrow \overline{\int} f = \underline{\int} f \Rightarrow f \in R([a,b])$, Q.E.D.

Věta: 6.5, monotonie a Riemannova integrovatelnost

Nechť *f* je omezená monotónní funkce na $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b])$.

Důkaz:

Mějme $M: \forall x \in [a,b]: |f(x)| \leq M$, *BÚNO f* rostoucí.

Vezměme $D_n = (x_j)_0^n; x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$ rovnoměrné dělení s krokem $\frac{b-a}{n}$.

$$S(f, D_n) - s(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$

Užijeme větu 6.4: $\epsilon > 0 \rightarrow$ volíme *n*: $\frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) < \epsilon$.

Pro toto *n* položíme

$D := D_n \Rightarrow S(f, D) - s(f, D) < \epsilon \Rightarrow f \in R([a,b])$, Q.E.D.

Def.: Řekneme, že funkce *f* je **stejnoměrně spojitá** na *I*,
pokud $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I: \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Pozn., $\forall \epsilon \exists \delta \forall x \forall y$ je silnější než $\forall x \forall \epsilon \exists \delta \forall y \approx \lim_{y \to x} f(y) = f(x)$

Př. (zatím vynecháno)

Věta: 6.6, spojitost versus stejnoměrná spojitost

Nechť *f* je spojitá na $[a,b]$. Pak *f* je na $[a,b]$ stejnoměrně spojitá.

Důkaz odložen.

Věta: 6.7, spojitost ⇒ Riemannova integrovatelnost

Nechť *f* je spojitá na $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b])$. ¿ ¿

Důkaz: Užijeme věty 6.4 (*f* omez. na $[a,b]$, pak

$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists D$ dělení $[a,b]: S(f,D) - s(f,D) < \epsilon$)

a věty 6.6 (*f* spoj. na $[a,b] \Rightarrow f$ stejnoměrně spojitá na $[a,b]$).

f je stejnoměrně spojitá, pokud

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a,b]: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$,

tedy stačí již jen dokázat $\forall \epsilon > 0 \exists D: S(f,D) - s(f,D) < \epsilon$.

Vezměme libovolné $\epsilon > 0$, protože *f* je stejnoměrně spojitá a

$\exists \delta > 0$ splňující definici.

Vezměme dělení $D = (x_j)_0^n: \nu(D) < \delta$ (třeba rovnoměrné).

$$S(f, D) - s(f, D) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j-1}| \cdot (\underbrace{\sup f(t)}_{t \in \{x_{j-1}, x_j\}} - \underbrace{\inf f(t)}_{t})}_{? \leq \epsilon} \leq \epsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j-1}| = \underbrace{\epsilon \cdot (b-a)}_{\text{konst.}}$$

Pozn., pokud bychom volili $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a} \ldots < \epsilon \Rightarrow$ předpoklad věty 6.4 ověřen.

f spojitá na $[x_{j-1}, x_j] \Rightarrow$ nabývá maxima v bodě *M* a minima v bodě *m*.

Pak $|m - M| \leq |x_j - x_{j-1}| \underbrace{< \delta}_{\nu(D) < \delta} \Rightarrow |f(m) - f(M)| < \epsilon$, Q.E.D.

Věta: 6.8, vlastnosti Riemannova integrálu

1. Linearita: pro $f, g \in R([a,b]), \alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$f + g, \alpha \cdot f \in R([a,b]); \quad (R)\int_a^b f + g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g; \quad (R)\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \cdot (R)\int_a^b f$$

2. $f \leq g, f, g \in R([a,b]) \ \Rightarrow \ (R)\int_a^b f \leq (R)\int_a^b g$

3. Additivita vzhledem k intervalům $a < b < c$:

$$f \in R([a,c]) \ \Leftrightarrow \ f \in R([a,b]) \wedge f \in R([b,c])$$

$$(R)\int_a^c f = (R)\int_a^b f + (R)\int_b^c f$$

Věta: 6.9, o derivaci integrálu podle horní meze

Nechť *J* je neprázdný interval,

f funkce taková, že $\forall \alpha, \beta \in J: f \in R([\alpha, \beta])$,

$c \in J$ libovolný bod,

$$F(x) := \begin{cases} (R)\int_c^x f(t) \cdot dt & \text{pro } x > c \\ -(R)\int_x^c f(t) \cdot dt & \text{pro } x < c \end{cases}.$$

Pak platí, že (1) *F* je spojitá na *J*

(2) *f* spojitá v $x_0 \in J$

$$\Rightarrow F'(x_0)=f(x_0).$$

Důkaz: (1) $x_0 \in J \Rightarrow F$ spojitá v x_0 ?

Pro názornost..

$c<x_0<y\in J$

$f\in R([c,y])\Rightarrow f$ omezená na $[c,y]$,

tedy $\forall t\in[c,y]: |f(t)|\le M$.

Chceme $F(x)-F(x_0)$ malé pro $x\to x_0$, *BÚNO* $x>x_0$.

$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)\cdot dt$ a tedy

$\int_{x_0}^{x} -M\cdot dt=-M\cdot(x-x_0)\le\int_{x_0}^{x} f(t)\cdot dt\le\int_{x_0}^{x} M\cdot dt=M\cdot(x-x_0)$.

Chceme $\lim_{x\to x_0+} F(x)-F(x_0)=0$

$\forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall|x-x_0|<\delta: \underbrace{|F(x)-F(x_0)|}_{\le M\cdot|x-x_0|}<\epsilon$

Položíme $\delta:=\frac{\epsilon}{M}\to|F(x)-F(x_0)|<M\cdot\delta=\epsilon$.

(2) $x_0\in J\Rightarrow f$ je spojitá v x_0 ?

$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+}\frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^{x} f(t)\cdot dt$

$\le\frac{1}{x-x_0}\underbrace{\int_{x_0}^{x}(f(x)+\epsilon)\cdot dt}_{=f(x_0)+\epsilon}$

$\ge\frac{1}{x-x_0}\underbrace{\int_{x_0}^{x}(f(x)-\epsilon)\cdot dt}_{=f(x_0)-\epsilon}$

$\forall\epsilon\exists\delta: x\in P_+(x_0,\delta)\Rightarrow\frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^{x} f(t)\cdot dt\in U(f(x_0),\epsilon)$, Q.E.D.

Důsl.: *f* spojitá na $(a,b)\Rightarrow f$ má na (a,b) primitivní funkci *F*. (slíbená věta ze začátku semestru)

$$\int_a^b f(t)\cdot dt=\underbrace{[F(t)]_{t=a}^{b}}_{\text{přírůstek od } a \text{ do } b}=F(b)-F(a)\text{, obecněji }=F_-(b)-F_+(a)=\lim_{x\to b-}F(x)-\lim_{x\to a+}F(x)$$

Př.: (1) $\int_0^{\pi}\sin x\cdot dx=[-\cos x]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=2$

(2) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}=[2\cdot\sqrt{x}]_0^1=2\cdot\sqrt{1}-2\cdot\sqrt{0}=2$, ale! $\frac{1}{\sqrt{x}}$ není spojitá ani omezená na $[0,1]\Rightarrow$ nemá Riemnnův integrál.

Zvolíme ϵ a spočítáme $\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}$ ...limita.

Def.: **Newtonův integrál** funkce *f* na intervalu (a,b) je $\lim_{x\to b-}F(x)-\lim_{x\to a+}F(x)$,

kde *F* je primitivní funkce k *f* na (a,b) a limity jsou vlastní.

Píšeme $(N)\int_a^b f(t)\cdot dt=[F(t)]_{t=a}^{b}$.

Věta: **6.10, per partes pro určitý integrál**

Mějme f, f', g, g' spojité funkce na $[a,b]$.

Potom $\int_a^b f\cdot g'=[f\cdot g]_a^b-\int_a^b f'\cdot g$.

Důkaz: *H* budiž primitivní funkce k $f'\cdot g$ na (a,b), *K* primitivní funkce k $f\cdot g'$ na (a,b).

Per partes: $K(x)=f(x)\cdot g(x)-H(x)$, $\int_a^b f\cdot g'=[K]_a^b=[f\cdot g]_a^b-\underbrace{[H]_a^b}_{=\int_a^b f'\cdot g}$

, Q.E.D.

Věta: **6.11, substituce pro určitý integrál**

1. Pokud *f* je spojitá na $[a,b]$, $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$, φ' spojitá na $[\alpha,\beta]$,

   pak $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\cdot dx$.

2. Pokud *f* je spojitá na $[a,b]$, $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$, φ je na, φ' spojitá na $[\alpha,\beta]$, $\varphi\neq 0$,

   pak $\int_a^b f(x)\cdot dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt$.

   Důkaz nebude.

Aplikace určitého integrálu

Apl.1: $S(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\})=(N)\int_a^b f(x)\cdot dx$.

Př.: Obsah kruhu. Počítáme pro půlkuruh:

$$\int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2-x^2}\cdot dx = \int_{-R}^{+R} R\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\cdot dx = \underbrace{R^2\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\cdot dt}_{t=\frac{x}{R};\,dt=\frac{dx}{R};\,t(-R)=-1;\,t(R)=1} = \underbrace{R^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sqrt{1+\sin^2 u}}_{=\cos u}\cdot\cos u\cdot du}_{t=\sin u;\,dt=\cos u\cdot du;\,t=\pm1\to u=\pm\frac{\pi}{2}} = R^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\cdot du = R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi$$

$\Rightarrow$ kruh : $\pi\cdot R^2$

Věta: Objem a povrch rotačních těles

Mějme $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ spojitou, $T=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\, x\in[a,b],\, \sqrt{y^2+z^2}\le f(x)\}$.

Potom objem T je $\pi\cdot\int_a^b f(x)^2\cdot dx$ a obsah povrchu T je $2\cdot\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}$.

Př.: Objem (jednotkové) koule:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\int_{-1}^{1}\pi\cdot(1-x^2)\cdot dx=\pi\cdot\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\pi\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot1^3$$

(přednáška 8.4.09)

Apl.3: Délka křivky $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, délka grafu f pro $x\in[a,b]$:

Použijeme dělení $D=(x_j)_{j=0}^n;\ \mathrm{int}[a,b]$,

délka lomené čáry budiž $L(f,D)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$.

Pak délka křivky je $L(f)=\sup\{L(f,D);\ D\ \text{dělení na int}[a,b]\}=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\cdot dx$, pokud je f' spojitá na $[a,b]$.

(D)ůkaz: $L(f,D)$ $=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot\sqrt{1+\Big(\underbrace{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}}_{*}\Big)^2}$ ... $*=f'(\xi_k);\ \xi_k\in(x_{k-1},x_k)$

$\le S(\sqrt{1+f'^2},D)$ $\qquad\le\sup\{f'(x);\ x\in(x_{k-1},x_k)\}$

$\ge s(\sqrt{1+f'^2},D)$ $\qquad\ge\inf\{f'(x);\ x\in(x_{k-1},x_k)\}$

$L(f,D)\xrightarrow{\sup}\int\sqrt{1-f'^2}\le L(f)$

Př.: Obvod (jednotkové) kružnice: $L(\sqrt{1-x^2},-1,1)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}=[\arcsin x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

$\Rightarrow$ obsah jednotkového kruhu $=2\cdot\pi\cdot1$

Věta: Délka křivky v $\mathbb{R}^n$

Mějme $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, φ' spojité, pak $L(\varphi([a,b]))=\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(x)^2+\ldots+\varphi_n'(x)^2}\cdot dx$.

Apl.3.5: Délka křivky dané paramtericky: $(x(t),y(t)),\ t\in[a,b]$, obecněji $(x_1(t),\ldots,x_n(t))$

$\int_a^b\sqrt{x'_1(t)^2+\ldots+x'_n(t)^2}\cdot dt$

$(t,f(t))\to\sqrt{1^2+f'(t)^2}$

Apl.4: Povrch pláště rotačního tělesa: $\int_a^b 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\cdot dx$, pro f , f' spojité na $[a,b]$

Př.: Povrch (jednotkové) koule: $\int_{-1}^{1}2\cdot\pi\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}2\cdot\pi=4\cdot\pi$

Apl.5: Odhady konečných součtů

Věta: Nechť f je funkce, $c_k=f(k),\ a\le b,\ a,b\in\mathbb{Z}$.

Pak $S=\sum_{k=a}^{b}c_k\ \le\int_{a-1}^{b}f(x)\cdot dx$, pokud f je nerostoucí na $[a-1,b]$,

$\ge\int_{a}^{b+1}f(x)\cdot dx$, pokud f je nerostoucí na $[a,b+1]$

(pro f neklesající platí opačná nerovnost).

Důkaz pro $\le$:

(1) šrafovaná plocha má obsah $S\le$ plocha primitivní funkce $f(x)$ na $[a-1,b]$

(2) šrafovaná plocha je jeden z dolních součtů pro f.

$\int_{a-1}^{b} f = \sup\{s(f,D); \forall D\}$, Q.E.D.

Př.: $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ ... $\underbrace{f(x)=\frac{1}{x}}_{\text{nerostoucí}}$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \geq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}\cdot dx = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

$$\leq \int_{0}^{n} \frac{1}{x}\cdot dx = \infty$$

$$= 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}_{a=2;b=n} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\cdot dx = 1+\log n$$

$\Rightarrow \log n \leq H_n \leq 1+\log n$ (pozn., $H_n = \log n + 0{,}577\ldots + O(\frac{1}{n})$)

Věta: **Integrální kritérium konvergence řad**

Mějme $f \geq 0$ nerostoucí na $\mathrm{int}[n_0-1,\infty]$ pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $a_n = f(n)$.

Pak $\sum a_n$ kg. $\Leftrightarrow$ $(N)\int_{n_0}^{\infty} f(x)\cdot dx < \infty$

Př.: $\sum \frac{1}{n}$ kg. $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x}\cdot dx < \infty$, $\int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x}\cdot dx = [\log x]_{n_0}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \log x - \log n_0 = \infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ div.

Př.: $\sum \frac{1}{\underbrace{n^a}_{a\neq 1}}$ kg. $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x^a}\cdot dx < \infty$, $\int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x^a}\cdot dx = [\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{x^{a-1}}]_{n_0}^{\infty} = \frac{1}{1-a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{a-1}} - \frac{1}{n_0^{a-1}} = \begin{matrix} 0 \text{ pro } a>1 \\ \infty \text{ pro } a<1 \end{matrix}$.

Důkaz: $\int_{n_0-1}^{n_0} f(x)\cdot dx = C < \infty ; \int_{n_0}^{\infty} f(x)\cdot dx = I$

$I \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \leq I + C \Rightarrow$ $I = \infty \Rightarrow$ řada diverguje,

$I < \infty \Rightarrow C + I < \infty \Rightarrow$ řada konverguje. Q.E.D.

Apl.7: $\Gamma(z) = (z-1)! = \int_{0}^{\infty} t^{z-1}\cdot e^{-t}\cdot dt$ (takže např. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{0}^{x} e^{-t^2}\cdot dt$$

Funkce více proměnných

Def.: **Funkce *n* proměnných** je zobrazení $f: M \to \mathbb{R}; M \subseteq R^n$.

Def.: Mějme $a \in \mathbb{R}^n ; a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Potom je okolí bodu $U(a,\delta) = (a_1-\delta, a_1+\delta)\times\ldots\times(a_n-\delta, a_n+\delta)$ a

prstencové okolí bodu $P(a,\delta) = U(a,\delta)\setminus\{a\}$.

Def.: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je **otevřená množina**, pokud $\forall\, x \in G\, \exists\, \delta > 0 : U(x,\delta) \subseteq G$.

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ je **uzavřená množina**, pokud $\mathbb{R}^n \setminus F$ je otevřená množina.

(přednáška 15.4.09)

Def.: Mějme $a \in \mathbb{R}^n ; A \in \mathbb{R}^* , f: M \to \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \underbrace{x}_{\in\mathbb{R}^n} \in P(a,\delta) : f(x) \in U(A,\epsilon)$.

Pozn., k určení *A* stačí „některá *x*“, např. *X* ležící na přímce bodem *a*.

Př.: $\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s+t}{s^2+t^2} = A \overset{s=t}{\Rightarrow} A = \lim_{s\to 0} \frac{s+s}{s^2+s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{2\cdot s}{2\cdot s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}$ ... neexistuje?

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s^3+t^3}{s^2+t^2} = A \overset{s=t}{\Rightarrow} A = \lim_{s\to 0} \frac{2\cdot s^3}{2\cdot s^2} = \lim_{s\to 0} s = 0$$

Pozn. k zamyšlení: najít $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ takovou, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje, ale „existuje limita stejná po všech přímkách“?

Def.: $f:M\to\mathbb{R}, M\subseteq\mathbb{R}^n$ je **spojitá** v $a\in M$, pokud $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.
(Pro a na hranici M bereme „limitu vzhledem k M“, tj. $\forall\, x\in P(a,\delta)\cap M$.)

Def.: **Parciální derivace** funkce $f:G\to\mathbb{R}$, kde $G\subseteq\mathbb{R}^n$ otevřené, v bodě $a\in G$, ve směru $i\in\{1,\dots,n\}$ je
$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a)}{h}$, pokud existuje.
Značení: $\dfrac{\partial}{\partial x_i}f(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}=\partial_i=\partial_i f$.

Pozn., $g_i(h)=f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\dots,a_n)\Rightarrow g'_i(0)=\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

Př.: $f(x,y)=e^x$, pak $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^x; \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$

Věta: **7.1, nutná podmínka na extrém**
Nechť $f:G\to\mathbb{R}, G\subseteq\mathbb{R}^n$ otevřená, $a\in G$, f' nabývá v a lokální extrém.
Pak $\forall i\in\{1,\dots,n\}:\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}=0$ nebo neexistuje.

Důkaz: $g_i(h)=f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\dots,a_n)$, f má v a lokální extrém $\Rightarrow g'_i(0)=0$ nebo neexistuje. $g'_i(0)=\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, Q.E.D.

Př.: $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2\cdot x\cdot y-y^2$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}=4\cdot x^3-2\cdot x-2\cdot y=0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}=4\cdot y^3-2\cdot x-2\cdot y=0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\Rightarrow x^3=y^3\to x=0; 4\cdot x^3-4\cdot x=0\to x=\pm 1,0$
„Podezřelé“ (stacionární) body: $(0,0)\dots 0;\ (1,1)\dots -2;\ (-1,-1)\dots -2$

Def.: Mějme $f:G\to\mathbb{R}$ a první parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}:G'\to\mathbb{R}, G'\subseteq G$.
Pak **druhá parciální derivace** je $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_i}f=\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f$ anebo také $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}f=\dfrac{\partial^2}{\partial^2 x_i}f$.
Analogicky třetí, ..., n-tá derivace.

Věta: **7.2, postačující podmínka pro extrém**
Mějme $f:G\to\mathbb{R}, G\subseteq\mathbb{R}^n$ otevřená, $a\in G, \forall i:\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}=0$.
Nechť druhé parciální derivace v a existují a jsou spojité.
Nechť matice $\left(\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$ je

1. pozitivně definitní $\Rightarrow$ v a je lokální minimum
2. negativně definitní $\Rightarrow$ v a je lokální maximum
3. indefinitní $\Rightarrow$ v a není extrém
4. poz./neg. semidefinitní $\Rightarrow$ nevíme.

Př.: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(4\cdot x^3-2\cdot x-2\cdot y)=12\cdot x^2-2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(4\cdot x^3-2\cdot x-2\cdot y)=-2=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=12\cdot y^2-2$
V bodě $(1,1)$: $\begin{pmatrix}10 & -2\\ -2 & 10\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ matice je pozitivně definitní $\Rightarrow$ lokální minimum.
V bodě $(-1,-1)$ stejné.
V bodě $(0,0)$: $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ matice je negativně semidefinitní $\Rightarrow$ neumíme rozhodnout.

Def.: **Derivace** ve směru $\vec{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ funkce $f:G\to\mathbb{R}, G\subseteq\mathbb{R}^n$ v $a\in G$ je $\lim_{t\in\mathbb{R}, t\to 0}\frac{f(a+t\cdot v)-f(a)}{t}=:\frac{\partial}{\partial v}f(a)$.

Def.: Mějme $f: G\to\mathbb{R}, a\in G, G\subseteq\mathbb{R}^n$ otevřená, $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lineární funkci ($L(h)=c_1\cdot h_1+\ldots+c_n\cdot h_n=c\cdot h$).

L je **totální diferenciál** funkce f v a, pokud $\lim_{\vec{h}\to(0,\ldots,0)}\frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{|h|}=0$.

Značíme $L=Df(a)$, $L(h)=Df(a)(h)$.

Př.: $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ hyperplocha v $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n=2$).

Pak tečná rovnina v bodě a má rovnici $z=f(a)+Df(a)\underbrace{(x-a)}_{\in\mathbb{R}^n}$.

Věta: **7.3, tvar totálního diferenciálu**

$Df(a)$ existuje ⇒ existují všechny parciální derivace a

$$Df(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\cdot h=\underbrace{\underbrace{\nabla f(a)}_{\text{gradient}(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(a)}{\partial x_n})}\cdot h}_{\text{skalární součin}}$$

.

Důkaz: $Df(a)(h)=L(h)=c_1\cdot h_1+\ldots+c_n\cdot h_n=c\cdot h$

$Df(a)$ existuje ⇒ existují $c_1,\ldots,c_n$ taková,

že $\lim_{h\to(0,\ldots,0)}\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{|h|}=0$.

To platí i pokud $h=t\cdot e_i\Rightarrow|h|=t$, tedy:

$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cdot e_i)-f(a)}{t}-\frac{c_i\cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}=0$ a $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial e_i}\Rightarrow c_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Podobně $\frac{\partial f(a)}{\partial v}f(a)=Df(a)(v)$, Q.E.D?

(přednáška 22.4.09)

Def.: Vektor $\nabla f(a)=(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(a)}{\partial x_n})$ se nazývá **gradient** funkce f v bodě a.

Pozn., $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ je spojitá pro všechna $i\Rightarrow\exists Df(a)\Rightarrow$ existují všechny parciální derivace ⇒ f je spojitá.

K zamyšlení: implikace nejde obrátit.

Def.: $f:G\to\mathbb{R}$ je $C^1(G)$, pokud $\forall i:\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je spojitá funkce na G.

Věta: **o aritmetice totálního diferenciálu**

Mějme $a\in G\subseteq\mathbb{R}^n; f,g:G\to\mathbb{R}^n; G$ otevřená a nechť existují $Df(a), Dg(a)$. Pak platí následující:

1. $D(f+g)(a)=Df(a)+Dg(a)$
2. $D(c\cdot f)(a)=c\cdot Df(a)$
3. $D(f\cdot g)(a)=f\cdot Dg(a)+g\cdot Df(a)$
4. $D(\frac{f}{g})(a)=\frac{Df(a)\cdot g(a)-Dg(a)\cdot f(a)}{g^2(a)}, g(a)\neq 0$

Věta: **diferenciál složeného zobrazení**

Mějme f funkci n proměnných $f(y_1,\ldots,y_n)$,

$g_1,\ldots,g_n$ funkce s proměnných,

$H(x)=f(g_1(x),\ldots,g_n(x)), H:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$,

$a\in\mathbb{R}^s, b\in\mathbb{R}^n$ takové, že $g_j(a)=b_j$ neboli $H(a)=f(b)$.

Nechť existují $Df(b), Dg_j(a), j=1,\ldots,n$.

Pak existuje $DH(a)$ a

$$DH(a)(h)=\sum_{i=1}^{s}(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(b)}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial g_j(a)}{\partial x_i}}_{\frac{\partial H}{\partial x_i}})\cdot h_i=\underbrace{Df(g(a))\cdot\underbrace{Dg(a)}_{\text{vektor}(g_1,\ldots,g_n)}}_{\Rightarrow\text{matice}}\cdot h,$$

$$DH(a)(h)\Rightarrow H=f(g_1(\underbrace{x}_{x+h}),\ldots,g_n(\underbrace{x}_{x+h})).$$

Př.: $f(x,y,z)=(x+y+z)^{x^2+\sin(x)\cdot e^y+e^{y+z}}=g(u(x,y,z),v(x,y,z))$,

kde $g(u,v)=u^v$, $u(x,y,z)=x+y+z$, $v(x,y,z)=x^2+\sin(x)\cdot e^y+e^{y+z}$.

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{řetízkové pravidlo}}=v\cdot u^{v-1}\cdot 1+u^v\cdot\ln u\cdot(2\cdot x+\cos(x)\cdot e^y)=u^{v-1}\cdot(v+u\cdot\ln u\cdot(2\cdot x+\cos(x)\cdot e^y))=$$

$$=(x+y+z)^{2\cdot x+\cos(x)\cdot e^y-1}\cdot(2\cdot x+\cos(x)\cdot e^y-1+(x+y+z)\cdot\ln(x+y+z)\cdot(2\cdot x+\cos(x)\cdot e^y))$$

Pozn. k zamyšlení: $f(x)=x^x=g(x,x)$ …?

Věta: **Existence extrémů funkce více proměnných**
Nechť $F\subseteq\mathbb{R}^n$ je uzavřená, omezená množina (tj. $\exists c\in\mathbb{R}\ \forall x\in F: d(\vec{0},x)\leq c$) a $f:F\to\mathbb{R}$ je spojitá funkce.
Pak *f* nabývá na *F* maxima a minima.

Věta: **Lagrangeova o vázaných extrémech**
Nechť $G\subseteq\mathbb{R}^n$ je otevřená, $s<n; f, g_1, \dots, g_s\in C^1(G); M=\{x\in\mathbb{R}^n; g_1(x)=\dots=g_s(x)=0\}$.
Pokud (1) $a\in M$ je bodem lokálního extrému *f* na *M* a
(2) vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_s(a)$ jsou lineárně nezávislé,
pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_s\in\mathbb{R}$ takové, že $\nabla f(a)=\lambda_1\cdot\nabla g_1(a)+\dots+\lambda_s\cdot\nabla g_s(a)$.

Př.: $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1; \nabla g_1=(2\cdot x, 2\cdot y, 2\cdot z)\Rightarrow\nabla f=\lambda\cdot(2\cdot x, 2\cdot y, 2\cdot z)$
(přednáška 29.4.09) – zde část chybí, nemám zapsáno korektně. někdo, pomoc??

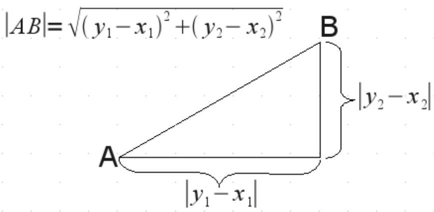
Metrické prostory

Def: **Metrický prostor** je (P,ρ) ,kde P je množina bodů a funkce $\rho: P\times P\to\mathbb{R}_0^+=[0,\infty)$
splňující:
1) $\rho(x,x)=0; \rho(x,y)>0 \quad \forall x\neq y\in P$
2) $\rho(x,y)=\rho(y,x) \quad \forall x,y\in P$
3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y) \quad \forall x,y,z\in P$

Př.: **(1)** Normální (eukleidovská) vzdálenost v $\mathbb{R}^n$

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$$

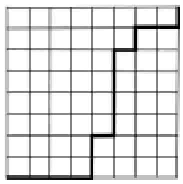
Ověření podmínek (důkaz):
1) $\rho_2(x,x)=\sqrt{0^2+\dots+0^2}=0$ => OK
2) absolutní hodnota => nezáleží na pořadí => OK
3) klasická Δ-nerovnost => OK



(2) Součtová metrika v $\mathbb{R}^n$ (taxikář na Manhattanu)

$$\rho_1(x,y)=|y_1-x_1|+\dots+|y_n-x_n|$$

Ověření podmínek (důkaz):
1) $\rho_1(x,x)=0+\dots+0=0$ => OK
2) absolutní hodnota => nezáleží na pořadí => OK
3) $\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|=\sum_{i=1}^n\|x_i-z_i|+|z_i-y_i\|\leq\sum_{i=1}^n|x_i-z_i|+|z_i-y_i|=\rho(x,z)+\rho(z,y)$ => OK



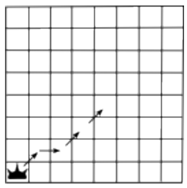
(3) Maximová metrika

$$\rho_\infty(x,y)=max_{i=1\dots n}|y_i-x_i|$$

Ověření podmínek (důkaz): Na cvičeních

(4) Maximová metrika na $C([0,1])$:

$$\underbrace{\rho_\infty(f,g)}_{f,g:[0,1]\to\mathbb{R}\text{ spojité}}=max_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|$$



Def.: Mějme (P,ρ) metrický prostor, $x\in P, r\in\mathbb{R}, r>0$. Pak:
Otevřená koule se středem *x* a poloměrem *r* je $B(x,r)=\{y\in P; \rho(x,y)<r\}$.
Uzavřená koule se středem *x* a poloměrem *r* je $\overline{B(x,r)}=\{y\in P: \rho(x,y)\leq r\}$

Def.: Mějme (P,ρ) metrický prostor. $G\subseteq P$ je **otevřená množina**, pokud $\forall x\in G\ \exists r>0: B(x,r)\subseteq G$
$F\subseteq P$ je **uzavřená množina**, pokud $P\setminus F$ je otevřená množina.

Věta: **8.1, vlastnosti otevřené množiny**
Mějme (P,ρ) metrický prostor, pak platí:
1. $\emptyset, P$ jsou otevřené.
2. Pokud $G_1, \dots, G_n\in P$ jsou otevřené, pak

$G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ je také otevřená.

3. Pokud množiny G_α, $\alpha \in A$, jsou otevřené, pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená.

Důkaz:
(1) $\emptyset \Rightarrow \forall x \in \emptyset$ platí cokoliv,
$P \Rightarrow \forall x \in P \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq P$
(2) $G = G_1 \cap \ldots \cap G_n ; x \in G \Rightarrow \forall i, x \in G_i \exists r_i > 0 : B(x, r_i) \subseteq G_i$
$r = min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$ a pro všechna $i : B(x,r) \subseteq G_i \subseteq G$.
(3) $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ .Pro
$x \in G\ \exists \alpha \in A : x \in G_\alpha \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq G_\alpha \subseteq G$, Q.E.D.

Věta: **8.2, vlastnosti uzavřené množiny**
Mějme (P, ρ) metrický prostor, pak platí:
1. $\emptyset$, P jsou uzavřené.
2. Pokud $F_1, \ldots, F_n \in P$ jsou uzavřené, pak $F_1 \cup F_2 \cup, \ldots, \cup F_n$ je také uzavřená.
3. Pokud množiny G_α, $\alpha \in A$, jsou uzavřené, pak $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ je uzavřená.

Důkaz:
1. $\emptyset = P \setminus P$ a $P = P \setminus \emptyset$ a $\emptyset, P$ otevřené $\Rightarrow$ $\emptyset, P$ uzavřené.
2. $F_1, \ldots, F_n \in P$ uzavřené množiny $\Rightarrow$ $G_i \subset P \setminus F_i$ otevřené množiny $\overset{V8.1}{\Rightarrow}$ $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ je otevřená $\Rightarrow$ $P \setminus G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ je uzavřená.
3. $P \setminus G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ $\Leftrightarrow$ $\exists i :\ x \in F_i$ $\Leftrightarrow$ $\exists i :\ x \notin G_i$ $\Leftrightarrow$ $x \notin G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ $\Leftrightarrow$ $x \in P \setminus G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n$

Př: (a, b) je otevřená $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(0,1) \cup (2,3)$ je otevřená, $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ je otevřená $\Rightarrow [a, b]$ uzavřená $\Rightarrow \{a\}$ uzavřená.

Def: Metriky ρ, σ na P jsou **ekvivalentní**, právě když $\exists c_1, c_2 > 0 \quad \forall x, y \in P :\ c_1 \sigma(x,y) \leq \rho(x,y) \leq c_2 \sigma(x,y)$

K zamyšlení: ρ, σ jsou ekvivalentní $\forall G \subseteq P :\ G$ je otevřená vzhledem k $\sigma \Leftrightarrow G$ je otevřená vzhledem k ρ

Fakt: Metriky $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní.

Def: Mějme (P, ρ) metrický prostor, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P, $x \in P$.
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** k x $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right)$, pokud $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Pozn., $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right) \rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0\ \ \forall n \geq n_0 :\ |\rho(x_n, x) - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |\rho(x_n, x)| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in B(x, \epsilon)$.

Věta: **8.3, vlastnosti konvergence**
(1) Pokud $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje $\exists x \in P\ \ \exists n_0\ \ \forall n \geq n_0\ \ x_n = x$, pak $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
(2) Pokud $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, pak $x = y$.
(3) Pokud $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, (x_{n_k}) je vybraná posloupnost z (x_n) a (n_k) je rostoucí posloupnost z $\mathbb{N}$, pak $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Důkaz: (1) Pro $n \geq n_0 :\ \rho(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$
(2) Pokud $\lim (x_n) = x;\ \lim (x_n) = y;\ x \neq y \Rightarrow SPOR.$
Položme $\epsilon := \frac{1}{2} \cdot \rho(x, y)$. Pak $\exists n_0\ \ \forall n \geq n_0\ \ \rho(x_n, x) < \epsilon$
$\exists n_1\ \ \forall n \geq n_1\ \ \rho(x_n, y) < \epsilon$
$n = max(n_0, n_1)$ a platí:
$\rho(x_n, x) < \epsilon,\ \rho(x_n, y) < \epsilon \Rightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < 2 \cdot \epsilon = \rho(x, y)$, $SPOR.$
(3) Víme $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 \overset{\text{o vybr. posl. pro } \mathbb{R}}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, x) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, Q.E.D.

Věta: **8.4, charakterizace uzavřené množiny**
Mějme (P, ρ) metrický prostor, $F \subseteq P$.
F je uzavřená, právě když $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} ;\ x_n \in F : \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in F$.

Důkaz: $\Rightarrow$ předpoklady: F uzavřená, $(x_n)_{n=1}^{\infty};\ x_n \in F,\ x_n \to x^{(*)}$
pro spor $x \notin F$ $\Rightarrow x \in P \setminus F$ otevřená $\overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ $\exists r > 0 :\ B(x, r) \subseteq P \setminus F$
$(*) \Rightarrow r\ \ \exists n_0\ \ \forall n \geq n_0 :\ \rho(x_n, x) < r \Leftrightarrow x_n \in B(x, r)$
a tedy $x_{n_0} \in F \cap B(x, r) = \emptyset$, $SPOR.$
$\Leftarrow$ chceme dokázat F uzavřená $\Leftrightarrow P \setminus F$ otevřená
$\Leftrightarrow \forall x \in P \setminus F\ \ \exists \epsilon > 0 :\ B(x, \epsilon) \subseteq P \setminus F$,
pro spor nechť toto pro nějaké $x \in P \setminus F$ neplatí.
$\epsilon = 1 \ldots B(x, 1) \not\subseteq P \setminus F \Rightarrow \exists x_1 \in B(x, 1) \cap F$
$\epsilon = \frac{1}{n} \ldots B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq P \setminus F \Rightarrow \exists x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F$
$x_n \in F\ \ \forall n :\ x_n \to x \ldots \rho(x, x_n) < \frac{1}{n};\quad 0 < \lim \rho(x_n, x) \leq \lim \frac{1}{n} = 0$
$\Rightarrow$ předpoklady věty $x \in F$, $SPOR.$ Q.E.D.

Def: Mějme (P, ρ) metrický prostor.
Řekněme, že $K \subseteq P$ je **kompaktní**, pokud $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in K$ existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) taková,

že existuje $x \in K:\ x_{n_k} \to x$.

Př.: $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní množina.

Věta: **8.5, vlastnosti kompaktní množiny**

Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $K \subseteq P$ kompaktní. Pak platí:

1. K je uzavřená,
2. K je omezená,
3. $F \subseteq K$ uzavřená $\Rightarrow F$ kompaktní.

Důkaz: (1) K uzavřená $\overset{\overbrace{V8.4}}{\Leftrightarrow}$ $\underbrace{\forall (x_n), x_n \in K:\ x_n \to x \Rightarrow x \in K}_{\text{chceme}}$

K kompaktní $\Rightarrow\ \exists \tilde{x} \in K\ \ \exists x_{n_k}: x_{n_k} \to \tilde{x}$ a tedy

pro $x_{n_k} \to x\ \Rightarrow\ x = \tilde{x} \in K$.

(2) sporem: K není omezená, libovolný $a \in P$, že

$\forall r:\ K \not\subseteq B(a,r)\ \Leftrightarrow\ \exists x_n \in K \setminus B(a,r)\ \Leftrightarrow\ x_n \in K \wedge \rho(a,x_n) \geq r$

K kompaktní $\Rightarrow \exists (x_{n_k})\ \ \exists x \in K:\ x_{n_k} \to x$,

tedy pro $\epsilon = 1:\ \exists k_0\ \ \forall k \geq k_0:\ \rho(x_{n_k}, x) < 1$,

$\exists k \geq k_0:\ \underbrace{n_k}_{\to\infty} > \underbrace{\rho(a,x)+1}_{\in\mathbb{R}}$

$n_k \leq \rho(a, x_{n_k}) \underbrace{\leq}_{\text{trojúh.ner.}} \rho(a,x) + \underbrace{\rho(x, x_{n_k})}_{<1} < \rho(a,x)+1 > n_k$, *SPOR.*

(3) $x_n \in F$, chceme $\exists x \in F, (x_{n_k}): x_{n_k} \to x$.

Víme $\exists x \in K, (x_{n_k}): x_{n_k} \to$ $\qquad x \in F$

$x_{n_k} \in F$ uz. Množina $\overset{\overbrace{V8.4}}{\Rightarrow} x \in F$. Q.E.D.

(přednáška 20.5.09)

Věta: **8.6, charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$**

$K \in \mathbb{R}^d$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz: (Pouze pro metriky ρ) $\Rightarrow$ Věta 8.5

$\Leftarrow$ pro $\rho(x,y) = \rho_\infty(x,y) = max_j |x^j - y^j|$ (stačí)

K omezená $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: K \subseteq [-c,c]^d$.

Ukážeme, že $[-c,c]^d$ je kompaktní pro $\forall c > 0$.

Kompaktní $\Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in [-c,c]^d \exists$ konvergentní podposloupnost,

tedy pro $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d): \forall n\ \ \forall i:\ x_n^i \in [-c,c]$

Pro první souřadnici $(x_n^1)_{n=1}^\infty$ je v $[-c,c]$

(z věty ze Z.S. $\Rightarrow$) (y_k^1) vybraná podposl., že $\lim_{k\to\infty} y_k^1 = y^1;\ \ y_k^1 = x_{n_k}^1$.

Pro druhou souřadnici $(x_{n_k}^2)_{k=1}^\infty$ $\exists$ kg. vybraná podposl. (y_l^2),

že $\lim_{l\to\infty} y_l^2 = y^2;\ \ y_l = x_{n_{k_l}}$. Podobně pro zbývající souřadnice.

(V prvním kroku vybereme prvky tak, aby první souřadnice konvergovala k y^1, z těchto v druhém kroku takové, aby druhá souřadnice konvergovala k y^2, …)

Pro *d*-tou souřadnici: $(y_i)_{i=1}^\infty$ vybraná z (x_n), že $y_i^1 \to y_1, \ldots, y_i^d \to y^d$.

Víme, že $\forall j = 1, \ldots, d:\ \lim_{i\to\infty} y_i^j = y^j$ (ve smyslu posloupnosti z $\mathbb{R}$),

chceme $\lim_{i\to\infty} y_i = (y_1, \ldots, y_d)$ (ve smyslu metrických prostorů).

Tedy dle definice $\lim_{i\to\infty} \rho(y_i, y) = max_j |y_i^j - y^j| = 0$. ? $\forall \epsilon \exists n_0$

$\exists n_1\ \ \forall i \geq n_1:\ |y_i^1 - y^1| < \epsilon$, …, $\exists n_d\ \ \forall i \geq n_d:\ |y_i^d - y^d| < \epsilon$

$n_0 := max\{n_1, \ldots, n_d\};\ \ \ i > n_0 \Rightarrow \rho_\infty(y_i, y) < \epsilon$, Q.E.D.

Def.: Mějme $(P,\rho),(Q,\sigma)$ metrické prostory, $M \subseteq P,\ \ f: M \to Q,\ \ x_0 \in M$. Řekneme, že

1. *f* je **spojitá v x_0 vzhledem k *M***, právě když $\forall \epsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap M:\ f(x_0) \in B_\sigma(f(x_0), \epsilon)$.
2. *f* je **spojitá na *M***, právě když $\forall x \in M:$ *f* je spojitá v *x* vzhledem k *M*.

Nechť $\forall \delta > 0:\ B_\rho(x, \delta) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \emptyset\ \wedge\ y \in Q$.

Pak $\underbrace{\lim_{x\to x_0}}_{\text{vzhledem k } M} f(x) = y\ \Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap M \setminus \{x_0\}:\ f(x) \in B_\sigma(y, \epsilon)$.

Věta: **8.7, charakteristika spojitých zobrazení**

Mějme $(P,\rho),(Q,\sigma)$ metrické prostory a $f: P \to Q$, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. *f* je spojitá v *P*
2. $\forall G$ otevřené v $(Q,\sigma): f^{-1}(G)$ je otevřená v (P,ρ)
3. $\forall F$ uzavřené v $(Q,\sigma): f^{-1}(F)$ je uzavřená v (P,ρ)

Pozn., Pro mnoho úvah nepotřebujeme metriky, stačí vědět, které množiny jsou otevřené.

Věta: **8.8, nabýváni extrémů na kompaktu**

Mějme (P,ρ) metrický prostor, $K \subseteq P$ kompaktní, $f: K \to \mathbb{R}$ spojitou, pak

1. *f* nabývá na *K* maxima a minima,
2. *f* je na *K* omezená.

Důkaz: $1 \Rightarrow 2$ OK

(1) jen pro maximum.

$s := \sup\{f(x);\ \ x \in K\};$ (sup: $\forall n \exists x_n: \lim f(x_n) = s$)

(a) $s \in \mathbb{R}:\ \forall n:\ s - \frac{1}{n}$ není hz. $\Rightarrow \exists x_n \in K:\ f(x_n) > s - \frac{1}{n}$

(b) $s = \infty:\ \forall n:\ n$ není hz. $\Rightarrow \exists x_n \in K:\ f(x_n) > n$

K je kompaktní, $\exists (y_k)$ vybraná z (x_n) tak,

že $\exists y \in K:\ \lim_{k\to\infty} y_k = y;\ \lim_{k\to\infty} f(y_k) = s$.

Chceme dokázat $f(y) = s$ maximum (stačí).

f spojitá v *y*: $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in B_\rho(y, \delta): \ \ \underbrace{f(x) \in \overbrace{B_{\rho_1}}^{\text{v}\,\mathbb{R}}(f(y), \epsilon)}_{|f(x) - f(y)| < \epsilon}$

Pro spor ať $f(y) \neq s$.

$\epsilon := \frac{1}{2} \cdot |s - f(y)| \ldots \exists \delta \exists k_0 \forall k > k_0: \ \ y_k \in B_\rho(y, \delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{|f(y_k) - f(y)| < \epsilon}_{\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(y_k) \leq f(y) + \epsilon < s}$, *SPOR*. Q.E.D.

Tímto definuji tyto výpisky jako uzavřené ;-) Připomínky, žádosti, chválu či nadávky jako obvykle zasílejte na zaantar@gmail.com.