Matematická analýza I

látka z

I. semestru informatiky MFF UK

Zpracovali:

Ondřej „Keddie“ Profant,
Jan „Zaantar“ Štětina
a další

Úvod

Věta: **Bernoulliho nerovnost**

Mějme $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$ a
$n \in \mathbb{N}$.
Pak $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$

Def: **Těleso, uspořádané těleso, etc...**

Def: Nechť $M \subseteq T$,
T je uspořádané těleso.
M je **omezená shora**, pokud existuje $a \in T$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $a \geq x$.
Takové *a* nazýváme **horní závora** *M*.
omezená zdola, pokud existuje $a \in T$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $a \leq x$.
Takové *a* nazýváme **dolní závora** *M*.
omezená, pokud je omezená zdola i shora.

Def: Nechť $M \subseteq T$,
T je uspořádané těleso.
Pak *s* je **supremum** *M*, pokud je *s* nejmenší horní závora *M*, tedy
(1) pro všechna $x \in M$ je $x \leq s$,
(2) pro všechna $s' \in T$, když $s' < s$, tak existuje nějaké $x \in M$, že $x > s'$ (tedy s' není horní závora).
Pak *i* je **infinum** *M*, pokud je *s* největší dolní závora *M*, tedy
(1) pro všechna $x \in M$ je $x \geq i$,
(2) pro všechna $i' \in T$, když $i' > i$, tak existuje nějaké $x \in M$, že $x < i'$ (tedy i' není dolní závora).

Věta: **<u>1</u>, o $\mathbb{R}$**

Existuje těleso, kde každá shora omezená množina má supremum. V jistém smyslu existuje právě jedno takové těleso. Budeme mu říkat **těleso reálných čísel**.

Věta: **<u>2</u>**

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je zdola omezená.
Pak existuje $inf\ M$.

Věta: **<u>3</u>, Archimedova vlastnost**

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ existuje nějaké $n \in \mathbb{N}$, že $n > x$.

Věta: **<u>4</u>, o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$**

Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ taková,
že $q \in (a, b)$ a zároveň $r \in a, b$.

Věta: **<u>5</u>, o odmocnině**

Nechť $n \in \mathbb{N}$,
$x \in [0, \infty)$.
Pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty]$, pro které platí $y^n = x$.
Píšeme $y = \sqrt[n]{x}$.

Tvrz.: **Trojúhleníková nerovnost**

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x+y| \leq |x| + |y|$

Posloupnosti

Def: **Posloupnost reálných čísel** je zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Píšeme a_n místo $a(n)$, posloupnost značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo jen (a_n) .

Def: Posloupnost (a_n) je

omezená,	je-li omezená množina	$\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$,
shora omezená,	je-li shora omezená množina	$\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$,
zdola omezená,	je-li zdola omezená množina	$\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$,
rostoucí,	pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je	$a_n < a_{n+1}$,
klesající,	...	$a_n > a_{n+1}$,
nerostoucí,	...	$a_n \le a_{n+1}$,
neklesající,	...	$a_n \ge a_{n+1}$.

Def: Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel,
$A \in \mathbb{R}$.
Pak řekneme, že A **je vlastní limita** (a_n) ,
píšeme $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, pokud

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \ge n_0 : |a_n - A| < \epsilon$ (pro všechna $\epsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \ge n_0$ je $|a_n - A| < \epsilon$).
Posloupnost, která má limitu, se nazývá **konvergentní**.

Věta: **1, o jednoznačnosti limity**
Každá posloupnost má jednu, nebo žádnou limitu.

Věta: **2,**
Pokud má posloupnost a_n vlastní limitu *A,* pak je a_n omezená.

Důkaz:

$zvolime\, \epsilon = 1 \;\Rightarrow\; \exists n_0 \forall n \ge n_0 \;\Rightarrow\; A - 1 < a_n < A + 1$

$M := max[\,|a_1|, .., |a_{n_0}|, |A+1|, |A-1|]$

pokud je M > nez všechny členy do n_0

a zaroven je větši než interval ve kterém leží všechny členy posloupnosti od n_0

pak je posloupnost a_n zhora omezena M

$\Rightarrow \forall n \quad |a_n| \le M$

Obdobně dokážeme i opačně pro omezeni zdola.

Def: Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti.
Řekneme, že (b_n) je **posloupnost vybraná z** (a_n) ,
pokud existuje rostoucí posloupnost (n_k) přirozených čísel taková, že $(b_k) = (a_{n_k})$.

Věta: **3, o limitě vybrané posloupnosti**
Nechť $\lim_{n \to \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$,
b_k je vybraná z a_n .
Pak $\lim_{k \to \infty} b_k = A$.

Věta: **4, o aritmetice limit**
Nechť $\lim_{n \to \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$,
$\lim_{n \to \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.
Pak platí:
(1) $\lim_{n \to \infty} a_n + b_n = A + B$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud $b \neq 0$.

Věta: **5, limita a** $<$

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$,

$\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Pak platí:

(1) $A < B \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$ (Jsou-li (limity) $A < B$, pak jsou od určitého n_0 všechna $a_n < b_n$)

(2) $\exists n_0 \forall n \geq n_0 a_n \geq b_n \Rightarrow A \geq B$ (Jsou-li od určitého n_0 všechna $a_n \geq b_n$, pak (i limity) $A \geq B$)

Věta: **6, o policajtech**

Nechť jsou $(a_n), (b_n), (c_n)$ posloupnosti takové, že

$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ (od určitého n_0 všechna $a_n \leq c_n \leq b_n$) a zároveň

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Def: **Rozšířená reálná osa** $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, přičemž:

$\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty$,

$|+\infty| = |-\infty| = \infty$,

$\forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : a + \infty = +\infty$, analogicky pro $-\infty$,

$\forall a \in \mathbb{R}^* : a > 0 \Rightarrow a \cdot \pm\infty = \pm\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}^* : a < 0 \Rightarrow a \cdot \pm\infty = \mp\infty$,

$\forall a \in \mathbb{R}^* : \frac{a}{\pm\infty} = 0$

následující výrazy nejsou definovány: $\infty - \infty ; 0 \cdot (\pm\infty) ; \frac{\pm\infty}{\pm\infty} ; \frac{\text{cokoliv}}{0}$

Def: **Nevlastní limita posloupnosti.**

Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

pokud $\forall k \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n > k$ (pokud pro každé *k* existuje nejaké n_0, od kterého všechna $a_n > k$).

Analogicky definujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Věta: **4*, VoAL na** $\mathbb{R}^*$

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$, pak platí následující, *MLPSS*:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud $b \neq 0$.

Pokud ne*MLPSS*, nelze VoAL použít.

Věta: **7, o součinu omezné a mizející posloupnosti**

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a

(b_n) je omezená.

Pak $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Def: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$.

Pak **supremum** $\sup(M)$ značí nejmenší horní závoru *M*,

$\sup(M) := min\{x \in \mathbb{R}^* ; \forall m \in M : m \leq x\}$.

Analog. **infinum** $\inf(M)$ značí největší spodní závoru *M*,
$\inf(M) := max\{x \in \mathbb{R}^*; \forall\, m \in M : m \geq x\}$.

Pozn.

Věta: **__8__, o dělení nulou**

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$,
$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ale existuje n_0 , od kterého jsou všechna $b_n > 0$.

Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ **.**

Věta: **__9__, o limitě monotoní posloupnosti**
Každá monotoní posloupnost má limitu.

Def: Nechť (a_n) je posloupnost.
Definujeme $b_n = \sup\{a_k ; k \geq n\}$,
$c_n = \inf\{a_k ; k \geq n\}$.
Limes superior (a_n) , značíme $\limsup_{n\to\infty} a_n$, je $\lim_{n\to\infty} b_n$.
Limes inferior (a_n) , značíme $\liminf_{n\to\infty} a_n$, je $\lim_{n\to\infty} c_n$.
Pozn., vždy existují.

Věta: **__10__, „o limitě a limes“**
Nechť (a_n) je posloupnost.
Pak platí následující ekvivalence:
$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A$
(Česky: posloupnost (a_n) má limitu v $A \in \mathbb{R}^*$ právě když je *limes superior* i *limes inferior* dané posloupnosti rovno *A*)

Věta: **__11__, Bolzano-Weierstrassova**
Nechť (a_n) je omezená posloupnost.
Pak existuje posloupnost (d_k) vybraná z (a_n) tak, že (d_k) je konvergentní.

Věta: **__12__, Bolzano-Cauchyho podmínka**

Posloupnost (a_n) má vlastní limitu právě když splňuje:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall m, n \in \mathbb{N} : (m \geq n_0) \wedge (n \geq n_0) \;\Rightarrow\; |a_m - a_n| < \epsilon$$

(Pro každé $\epsilon > 0$ existuje nějaké n_0 tak, aby při libovolných $m, n \geq n_0$ platilo $|a_m - a_n| < \epsilon$)

Řady

Def: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost.

Číslo $s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ nazveme **k-tý částečný součet řady** $\sum a_n$ **.**

Součet řady nazveme limitu $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, pokud existuje. Tu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Def: Pokud $\sum a_n \in \mathbb{R}$, **řada konverguje** (kg.),
$\sum a_n \in \{+\infty, -\infty\}$ nebo $\sum a_n$ neexistuje, **řada diverguje** (div.).

Věta: **<u>1</u>, nutná podmínka konvergence**

Pokud $\sum a_n$ kg., tak $\lim a_n = 0$.
Pozor! Touto větou můžeme konvergenci jen vyvrátit (implikace, ne ekvivalence)!
Důkaz:

$$S_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$
$$\lim S_k = S \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad BC\ podmínka\,(Věta\,12)$$
$$\forall \epsilon \exists n_0 \forall m, n > n_0 : \ |S_m - S_n| < \epsilon$$
$$m = n - 1 \quad S_m - S_{n\text{-}1} = a_n$$
$$\forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 : \ |a_n - 0| < \epsilon \ \rightarrow \ \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Věta: **<u>2</u>, o aritemetice řad**

(1) pro všechny $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí ekvivalence:

$$\sum a_n \text{kg.} \Leftrightarrow \sum \alpha a_n \text{kg.}$$

(2) platí následující ekvivalence:

$$\sum a_n \text{kg.}; \sum b_n \text{kg.} \ \Rightarrow \ \sum (a_n + b_n) \text{kg.}$$

Důkaz:

(1)
$$\left. \begin{cases} S_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k \\ T_k := \alpha \cdot a_1 + \ldots + \alpha \cdot a_k \end{cases} \right\} \Rightarrow T_k = \alpha \cdot S_k$$

Dle VoAL pak platí:

$$\lim T_k = \alpha \lim S_k \quad MLPSS$$
$$\lim S_k = \lim \alpha \cdot T_k = \frac{1}{\alpha} \lim T_k \quad MLPSS$$

(2) Důkaz je (údajně) zřejmý, dle Věty 2.

Řady s pozitivními členy

Máme: $\sum a_n , \quad a_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (S_k)\ je\, neklesající:$

Z toho plynou dvě možnosti: $\sum a_n \begin{Bmatrix} = +\infty \ldots \text{div.} \\ \in \mathbb{R} \ldots \text{kg.} \end{Bmatrix}$.

Věta: **<u>3</u>, srovnávací kriterium**

Nechť $\sum a_n , \sum b_n$ jsou řady s nezápornými členy $a_n, b_n \geq 0$ a

existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$.

Pak platí:

(1) $\sum b_n \text{kg.} \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{kg.}$

(2) $\sum a_n \text{div.} \Rightarrow \sum b_n \text{div.}$

Důkaz: $k > n_0$, položíme:

$$S_k = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0 - 1}}_{=A} + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_k$$

$$T_k = \underbrace{b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_0 - 1}}_{=B} + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_k$$

Vidíme, že pro všechna $i \le n_0$ platí $a_i \le b_i$. Z toho vyplývá $S_k - A \le T_k - B$.

Existují $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ a $\lim_{k\to\infty} t_k = t$. Dle věty 5 pak $s \le t$.

Pak platí (1) $t < \infty \Rightarrow s < \infty$

(2) $s = \infty \Rightarrow t = \infty$.

Věta: **4, limitní srovnávací kritérium**

Nechť $\sum a_n, \sum b_n$ řady s nezápornými členy (platí $a_n, b_n \ge 0$) a

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = k \in \mathbb{R}^*,$$

pak platí následující:

(i) Pro $k = (0, \infty)$ platí $\sum a_n \text{kg.} \Leftrightarrow \sum b_n \text{kg.}$

(ii) Pro $k = 0$ platí $\sum b_n \text{kg.} \Rightarrow \sum a_n \text{kg.}$

(iii) Pro $k = \infty$ platí $\sum a_n \text{kg.} \Rightarrow \sum b_n \text{kg.}$

Důkaz: pro (i)

Dle def. limity pro $\epsilon = \frac{k}{2}$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \ge n_0$ platí $\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| \le \frac{k}{2}$.

Určíme n_1, n_2 následovně: $0 < n_1 := \frac{1}{2} \cdot k \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2} \cdot k =: n_2$

Platí tedy $n_1 b_n \le a_1 \le n_2 k_n$, $b_n \le \frac{1}{n_1} \cdot a_n$.

Z toho plynou následující implikace:

$$\sum b_n \text{kg.} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{V2}} \sum n_2 b_n \text{kg.} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{V3}} \sum a_n \text{kg.}$$

$$\sum a_n \text{kg.} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{V2}} \sum \frac{1}{n_1} b_n \text{kg.} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{V3}} \sum b_n \text{kg.}$$

Věta: **5, Cauchyovo odmocninové kritérium**

$\sum a_n, \sum b_n$ jsou řady s nezápornými členy (platí $a_n, b_n \ge 0$), pak

(i) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0 \colon \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sum a_n \text{kg.}$

(Pokud existuje $q \in (0,1)$ tak, že existuje n_0, že pro všechna $n \ge n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} < q$, tak $\sum a_n$ kg.)

(ii) $\exists q > 1\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0 \colon \sqrt[n]{a_n} > q \Rightarrow \sum a_n \text{div.}$

(Pokud existuje $q > 1$ tak, že existuje n_0, že pro všechna $n \ge n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} > q$, tak $\sum a_n$ div.)

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{kg.}$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{div.}$

Pozn., pro $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

Věta: **6, d'Alambertovo podílové kritérium**

$\sum a_n$ řada s nezápornými členy ($a_n \geq 0$). Pak platí následující:

(i) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0\ \ \forall n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \ \Rightarrow \ \sum a_n \text{kg.}$

(Pokud existuje $q \in (0,1)$ a existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, potom $\sum a_n \text{kg.}$)

(ii) $\exists q > 1\ \exists n_0\ \ \forall n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > q \ \Rightarrow \ \sum a_n \text{div.}$

(Pokud existuje $q > 1$ a existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$, potom $\sum a_n \text{div.}$)

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \ \Rightarrow \ \sum a_n \text{kg.}$ (Varování! Neplatí ale $\forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \sum a_n \text{kg.}$, protipříklad: $a_n = \frac{1}{n} \text{div.}$)

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \ \Rightarrow \ \sum a_n \text{div.}$

Pozn., stále nic nevíme, pokud se limita rovná 1.

Věta: **7, Ranbeho kritérium**

$\sum a_n$ řada s nezápornými členy. Pak platí:

(1) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{kg.}$

(2) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{div.}$

Věta: **8, kondenzační kritérium**

$\sum a_n$ řada s nezápornými členy.

Je-li a_n nerostoucí (tedy $\forall a_n : a_n \geq a_{n+1}$), pak $\sum a_n \text{kg.}$ právě když $\sum 2^n \cdot a_{2n} \text{kg.}$.

Řady se znaménky

Def: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{kg.}$. Pak řekneme, že **posloupnost** a_n **konverguje absolutně**, $\sum a_n \text{kg.abs.}$.

Věta: **9, Bolzano-Cauchyho podmínka pro řady**

$$\sum a_n \text{kg.} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall m, n \in \mathbb{N}\ \ m, n > n_0 \ : \ \left|\sum_{j=m}^{n} a_j\right| < \epsilon$$

Česky: $\sum a_n$ konverguje, právě když pro všechna $\epsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $m, n > 0$ je absolutní hodnota součtu $a_n \dots a_m$ menší než dané ϵ .

Pozn., tato věta je důležitá - jedná se o ekvivalenci.

Věta: **10**

Pokud $\sum a_n \text{kg.abs.}$,pak $\sum a_n \text{kg.}$

Lemma:Abelova parciální sumace

Mějme $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n \in \mathbb{R}$ a

Položme $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

Pak $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (s_n \cdot (b_i - b_{i+1})) + s_n \cdot b_n$.

Pokud je navíc b_n nerostoucí, tedy $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq 0$, pak

$$b_i \cdot min\, s_1 \leq \sum a_i \cdot b_i \leq b_1\, max\, s_i \,.$$

Věta: **<u>11</u>, Abel-Dirichletovo kritérium**

Nechť je a_n posloupnost z $\mathbb{R}$

b_n nerostoucí posloupnosti z $\mathbb{R}$.

Pokud platí podmínka (A) nebo (D) (níže), pak $\sum a_n \cdot b_n$ kg.

(A) $\sum a_n$ kg.

(D) $\lim b_n = 0$,

$\sum a_n$ má omezené částečné součty

$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad |S_m| < k$ (Existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $m \in \mathbb{N}$ je $|s_m| < k$)

Věta: **<u>12</u>, Leibnitzova**

upravuje podmínku (A) z předchozí věty:

Je-li a_n rostoucí, pak platí ekvivalence: $\sum (-1)^n a_n$ kg. $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

<u>Limity funkcí</u>

Def: Pro $a \in \mathbb{R}; \delta > 0; \delta \in \mathbb{R}$ definujeme

prstencové okolí *a* velikosti δ :

$$P(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$$

$P(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right)$ a $P(-\infty, \delta) = \left(-\infty, \frac{1}{\delta}\right)$

pravé prstencové okolí *a*:

$$P_+(a, \delta) = (a, a + \delta)$$

levé prstencové okolí *a*:

$$P_-(a, \delta) = (a - \delta, a)$$

okolí *a*:

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

$U(+\infty, \delta) = P(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$ a $U(-\infty, \delta) = P(-\infty, \delta) = (-\infty, \frac{1}{\delta})$

pravé okolí *a*:

$$U_+(a, \delta) = [a, a + \delta)$$

levé okolí *a*:

$$U_-(a, \delta) = (a - \delta, a]$$

Def: **Limita funkce**

Říkáme, že $f: M \to \mathbb{R}; M \subseteq \mathbb{R}$ má v $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ pokud

Pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in P(a, \delta)$ platí $f(x) \in U(A, \epsilon)$ (tzn. $f(P(a, \delta)) \subseteq U(A, \epsilon)$).

Jinak také: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{0 < |x - a| < \delta}_{x \in P(a, \delta)} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - A| < \epsilon}_{f(x) \in U(A, \epsilon)}$

Věta: **<u>1</u>, Heine**

Máme-li $a, A \in \mathbb{R}^*$

$f: M \to \mathbb{R}; M \subseteq \mathbb{R}$

$\exists \delta > 0 : P(a, \delta) \subseteq M$ (existuje číslo δ takové, že prstencové okolí $P(a, \delta)$ je v *M*),

Potom platí ekvivalence:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (x_n), \ x_n \xrightarrow{n \to \infty} a, \ x_n \neq a : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Je-li limita $f(x)$ v bodě *a* rovna *A*, pak pro všechny posloupnosti x_n, které se při $n \to \infty$ blíží *a*, platí, že limita $f(x_n)$ při $n \to \infty$ také rovna *A*.

Věta: **<u>2</u>, jednoznačnost limity**

Pro všechny funkce platí, že má v kterémkoliv bodě jednu nebo žádnou limitu.

Věta: **<u>3</u>, limita a omezenost**

Nechť *f* má vlastní limitu v $a \in \mathbb{R}^*$.

Pak existuje $\delta > 0$ tak, že *f(a)* je omezená na intervalu $P(a, \delta)$.

Věta: **<u>4</u>, o aritmetice limit**

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$,

$\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$,

$\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$.

Potom platí, *MLPSS*:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

(iii) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}$

Věta: **<u>5</u>, o dvou strážnících**

Máme $a \in \mathbb{R}^*$

$k, g, h: M \to R, M \subseteq \mathbb{R}$

Nechť existuje $\exists \delta_0 > 0$ tak, že pro všechna $x \in P(a, \delta_0)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a nechť $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=A$.

Pak také platí $\lim_{x\to a} h(x)=A$.

Věta: **6, o limitě složené funkce**

Nechť $\lim_{x\to a} g(x)=A$

$\lim_{y\to A} f(y)=B$.

Pokud (P1) *f* je spojitá v *A* nebo

(P2) existuje $\zeta>0$ tak, že pro všechna $x\in P(a,\zeta)$ platí $g(x)\neq A$,

Pak platí $\lim_{x\to a} f(g(x))=B$.

(nejsložitější případ: *f* není spojitá v *A*

víme $\lim_{y\to A} f(y)=B$.

… $g(a)$ se nesmí rovnat *A* (nebylo by definováno $f(g(a))$), ale pokud se blíží,

platí $\lim_{x\to a} f(\underbrace{g(x)}_{\to A})=\lim_{y\to A} f(y)=B$)

Věta: **7, o limitě monotonní funkce**

Nechť f je monotónní na intervalu $(a,b)\in\mathbb{R}^*$.

Pak existuje $\lim_{x\to a+} f(a)$ a $\lim_{x\to b-} f(a)$.

Derivace

Def: **Derivace funkce** $f: M \to \mathbb{R}$ *;* $M \subseteq \mathbb{R}$ *;* $a \in M$

je $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$,

zleva $f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$,

zprava $f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Věta: **8, vztah derivace a spojitosti**

Nechť *f* má v bodě *a* derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Pak je *f(a)* v bodě *a* spojitá.

Věta: **9, aritmetika derivací**

Nechť $f'(a), g'(a)$ existují.

Pak: $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)}{g'(a)}$, pokud $g(a) \neq 0$ a *g* je spojitá v *a*.

Věta: **10, derivace složené funkce**

Nechť existují $f'(y_0)$ a $g'(x_0)$,

g spojitá v x_0,

$g(x_0) = y_0$.

Pak $f(g(x))' = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$, *MLPSS.*

(účel podmínek pro *g*: musí platit $g(x_0) = y_0$, abychom věděli, že existuje $f'(g(x_0))$; *g* je spojitá v x_0 dle věty 8)

Věta: **11, derivace inverzní funkce**

Nechť *f* je na intervalu (a, b) a rostoucí (evt. klesající),

existuje vlastní $f'(x_0) \neq 0$.

Potom f^{-1} má v bodě $f(x_0) = y_0$ derivaci:

$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Věta: **12, l'Hospitalovo pravidlo**

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a platí jedna z následujících možností:

(1) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$ (typ $\frac{0}{0}$)

(2) $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$ (typ $\frac{?}{\infty}$)

Nechť také existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Potom platí, že $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}=A$. (pozn, funguje stejně pro $x\to a_{-}$ a $x\to a$)

Věta: **<u>13</u>, jednostranná derivace = limita derivace**

Nechť *f* je spojitá zprava v $a\in\mathbb{R}$,

existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)=A\in\mathbb{R}^{*}$.

Pak $f'_{+}(a)=A$ (využíváme, pokud v předchozích vzorcích narazíme např. na *MLPSS*).

<u>O spojitých funkcích</u>

Def: **Vnitřní body** intervalu *J* (vnitřek *J*, *int J*) jsou body, které nejsou **krajní**.

Def: Máme *f*... funkce

J... interval, $J\in D_f$.

f je **spojitá na *J***, pokud je *f* spojitá v každém $x\in\operatorname{int} J$.
Pokud počáteční bod *J* patří do *J*, požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě, analogicky pokud koncový bod *J* patří do *J*, požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.

Věta: **Darbouxova**
Nechť *f* je spojitá na $[a,b]$,
$f(a)<y<f(b)$.
Pak existuje $x\in(a,b)$ tak, že $f(x)=y$.

Věta: Nechť *J* je interval,
f je funkce spojitá na *J*.
Pak $f(J)$ je interval.