Lineární algebra I

látka z

I. semestru informatiky MFF UK

Zpracovali:

Ondřej „Keddie" Profant,
Jan „Zaantar" Štětina

Obsah

Matice........2
Grupy........4
Grupa permutací........4
Znaménko, inverze a transpozice grup........5
Podgrupy........5
Tělesa........6
Vektorové prostory........7
Lineární nezávislost........8
Příklady vektorových prostorů a další........9
Steinitzova věta o výměně........11
Dimenze sloupcového prostoru je rovna dimenzi řádkového prostoru matice........12
Lineární zobrazení (homomorfismus)........13
Ukázkové příklady na lineární zobrazení........16
Skalární součin........18
Gramova-Schmidtova ortogonalizace........18

Matice

Def: **Reálný n-složkový vektor** $\vec{b}$ je uspořádaná vrstva reálných čísel $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, b_i \in \mathbb{R}$.

Vektory jsou sloupcové, pro řádkový zápis použijeme transpozici $\vec{b}^T=(b_1,\dots,b_n)$.

Def: **Matice** typu $m\times n$ je schéma $m\cdot n$ čísel sestavených do *m* řádků a *n* sloupců: $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

Elementární řádkové úpravy matice:

(a) vynásobení *i*-tého řádku nenulovým *t*,

(b) přičtení *j*-tého řádku *i*-tému řádku $(i\neq j)$.

Pomocí operací (a) a (b) lze simulovat i operace

(b') přičtení *t*-násobku *j*-tého řádku k *i*-tému řádku $(i\neq j)$,

(c) záměna dvou řádků.

Def: **Soustava lineárních rovnic**

Mějme *m* rovnic o *n* neznámých.

Používáme zápis ve tvaru $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$, kde

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ je matice soustavy,

$\vec{b}\in\mathbb{R}^m$ je vektor pravých stran a

$\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)^T$ je vektor neznámých.

Matice $(A|\vec{b})$ (tedy matice *A,* k níž je zprava připsán vektor $\vec{b}$) se nazávý **rozšířená matice soustavy**.

Def: **Řešení soustavy** $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ je reálný vektor $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$,

pokud jeho hodnoty splňují všech *m* rovnic soustavy, tedy $\forall i: a_{i,1}\cdot x_1+\ldots+a_{i,n}\cdot x_n=b_i$.

Def: Matice *A* typu $m\times n$ je **v odstupňovaném tvaru**, pokud

nenulové řádky jsou ostře uspořádány podle počtu počátečních nul a

nulové jsou až za nenulovými.

Def: **Pivot** je první nenulový prvek (zleva) daného řádku matice v odstupňovaném tvaru.

Bázové proměnné v odstupňovaném tvaru matice odpovídají sloupcům s pivoty.

Volné proměnné jsou ty, které nejsou bázové.

Def: **Hodnost matice** $rank(A)$ je rovna počtu pivotů libovolné matice $A'\simeq A$ v odstupňovaném tvaru.

Def: **Nulová matice** je matice *0*, kde pro všechna $i,j:(0)_{i,j}=0$.

Čtvercová matice je matice *A* typu $m\times n$, kde $m=n$.

Jednotková matice řádu *n* je I_n , kde $(I_n)_{i,j}=\begin{Bmatrix} 1 \text{ pro } i=j \\ 0 \text{ pro } i\neq j \end{Bmatrix}$.

Hlavní diagonála čtvercové matice *A* je tvořena prvky $(a)_{i,i}$.

Transponovaná matice k matici *A* typu $m\times n$ je A^T typu $n\times m$: $(A^T)_{i,j}=(A)_{j,i}$.

Symetrická matice je čtvercová matice, pro kterou platí, že $A=A^T$.

Diagonální matice má na hlavní diagonále nenulové prvky, všude jinde nuly.

Def: **Součet matic** stejného typu odpovídá součtu prvků obou matic na stejných pozicích:

$A+B:(A+B)_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$

Def: **Násobek matice** číslem $\alpha\in\mathbb{R}$ definujeme jako násobek všech prvků matice číslem α :

$\alpha\cdot A:(\alpha\cdot A)_{i,j}=\alpha\cdot a_{i,j}$.

Pozor, násobek matice není součin matic!

Def: **Součin matic**

Je-li matice A typu $m \times n$ a matice B typu $n \times p$, pak AB je matice typu $m \times p$ určená následovně:

$$A \cdot B : (A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Mnemotechnický zápis:

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{AB} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 3 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 7 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & . \\ & & & & 0 & . \\ & & & & 2 & . \\ & & & & 0 & . \\ \hline . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 7 & . \end{array}$$

Příklad součinu matic

Def: **Inverzní matice** k matici A je čtvercová matice A^{-1} typu n, kde $A^{-1} \cdot A = I_n$.

Def: **Regulární matice** má inverzní matici, **Singulární matice** žádnou takovou nemá.

Tvrz.: Za předpokladu, že jsou výsledky operací definovány, platí:

(a) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
(b) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
(c) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
(d) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Věta: Pro čtvercovou matici A jsou následující podmínky ekvivalentní

Tvrz.: Pro regulární matici A platí $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Grupy

Binární operace na množině X je zobrazení $X \times X \to X$.
Grupa je množina G s binární operací $\circ$, která splňuje následující axiomy:

(A)	Operace v grupě je **asociativní**, tj. pro $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ každé $a, b, c \in G$.
(N)	Grupa má **neutrální prvek** $e \in G$, neutrální vzhledem k operaci, tj. platí $a \circ e = e \circ a = a$ pro každé $a \in G$.
(I)	Grupa má vzhledem ke všem $a \in G$ inverzní prvek $b \in G$, takže platí $a \circ b = b \circ a = e$

Pokud platí navíc i axiom (K), nazývá se grupa **komutativní** nebo **Abelova grupa**.

(K)	Operace na Abelově grupě je **komutativní**, tj. pro všechna $a, b \in G$ platí $a \circ b = b \circ a$

Příklady grup:
Aditivní grupy (operace $\circ$ je odvozena od sčítání):

$$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}^{m \times n}, +), (\underbrace{\mathbb{R}[x]}_{\text{reálné fce}}, +), \ldots$$

Multiplikativní grupy (operace $\circ$ je odvozena od násobení):

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{Q}^+, \cdot), \underbrace{(\text{regulární matice řádu n}, \cdot)}_{\text{není komutativní}}, \ldots$$

Různá pozorování:

- Proč je neutrální prvek dán jednoznačně?
  Dokažme sporem, pokud jsou $e_1 \neq e_2$ dva různé neutrální prvky, pak dle axiomu (N) musí platit $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$, což je spor s $e_1 \neq e_2$.

- Každému prvku grupy je dán inverzní prvek jednoznačně.
  Dokažme sporem, jsou-li $b \neq b'$ dva prvky inverzní k *a*, pak platí $b \underbrace{=}_{(N)} b \circ e \underbrace{=}_{(I)} b \circ (a \circ b') \underbrace{=}_{(A)} (b \circ a) \circ b' \underbrace{=}_{(I)} e \circ b' \underbrace{=}_{(N)} b'$, což je spor s $b \neq b'$.

- Platí $a = b \Leftrightarrow a \circ c = b \circ c \Leftrightarrow c \circ a = c \circ b$.
  Důkaz je triviální, $a = a \circ e = a \circ c \circ c^{-1} = b \circ c \circ c^{-1} = b \circ c = b$, pro $c \circ a$ analogicky.

- $a \circ x = b$ má jednoznačné řešení, stejně tak $x \circ a = b$.
  Důkaz: $x = e \circ x = a^{-1} \circ a \circ x = a^{-1} \circ b$, pro druhou rovnici analogicky.

Grupa permutací

Permutace na n-prvkové množině je zobrazení $p: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, které je *prosté* a *na*.

Symetrická grupa S_n je *množina všech permutací na n prvcích* spolu s *operací skládání* $\circ$.

Skládání permutací probíhá následovně: $(q \circ p)(i) = q(p(i))$ (jako skládání funkcí).

$\circ$ je binární operace:

$$i \underbrace{\neq}_{\text{p je prosté}} j \Rightarrow p(i) \neq p(j) \underbrace{\neq}_{\text{q je prosté}} \Rightarrow q(p(i)) \neq q(p(j)) \Leftrightarrow q \circ p \text{ je prosté}$$

Pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ existuje j takové, že $q(j) = i$, protože *q* je na.
Pro všechna $j \in \{1, \ldots, n\}$ existuje k takové, že $p(k) = j$, protože *p* je na.
To znamená, že pro všechna *i* existuje *k*, tž. $(q \circ p)(k) = q(p(k)) = i$, čili $q \circ p$ je na.

Ověříme axiomy grupy v grupě permutací:

- (A): $(r \circ q) \circ p = r \circ (q \circ p)$ … důkaz obrázkem.
- (N): *id* je neutrální prvek: $id(k) = k$ pro všechna $k \in \{1, \ldots, n\}$.
- (I): inverzní permutace je dána takto: $p(i) = j \Leftrightarrow p^{-1}(j) = i$

Poznámka: S_n není Abelova grupa, neplatí komutativita (protipříklad na S_3).

Znaménko, inverze a transpozice grup

Transpozice je permutace, která má *jeden cyklus délky 2* a *n-2 cyklů délky 1*.
Lidsky: při každé transpozici přehodíme jen jeden prvek s jiným (permutace „po krocích").
Každou permutaci pak lze získat jako složení transpozic.

Prvky *i,j* tvoří **inverzi** v permutaci, pokud $i< j$ a zároveň $p(i)> p(j)$ (v bipartitním grafu se šipky z *i* a *j* musí křížit).

Znaménko permutace je číslo $sgn(p)=(-1)^{\text{počet inverzí v permutaci p}}$.
Tedy například $sgn(i,j)=1$, $sgn(\text{transpozice})=-1$.
Na S_3 platí $sgn(1,3,2)=sgn(3,2,1)=sgn(2,1,3)=-1$ a $sgn(1,2,3)=sgn(2,3,1)=sgn(3,1,2)=1$.
Platí $sgn(q\circ p)=sgn(q)\cdot sgn(p)$.
V důsledku toho také $sgn(p)=(-1)^{\text{počet transpozic v libovolném rozkladu p na transpozice}}=(-1)^{\text{sudých cyklů p}}$.

Podgrupy

Grupa $(H,\cdot)$ je **podgrupou** grupy $(G,\circ)$, pokud je $H\subseteq G$ a pro všechna $a,b\in H$ platí $\underbrace{a\cdot b}_{\text{v H}}=\underbrace{a\circ b}_{\text{v G}}$.
(Pozor! Rozdílné operace jsou schválně)
Například $(3\mathbb{Z},+)$ podgrupou $(\mathbb{Z},+)$ podgrupou $(\mathbb{Q},+)$ podgrupou $(\mathbb{R},+)$ …

Pokud je *H* podgrupou *G*, pak se množinám $aH=\{a\circ h, h\in H\}$ říká **levé rozkladové třídy** a množinám $Ha=\{h\circ a, h\in H\}$ se říká **pravé rozkladové třídy**.

Normální podgrupy jsou podgrupy Abelových grup, platí pro ně $aH=Ha \Leftrightarrow aHa^{-1}=H$ ...
Pozn, mají následující vlastnost: pro všechna $a,b\in G$ platí, že pokud $x\in aH$ nebo $y\in bH$, pak $x\circ y\in(a\circ b)H$.

Pokud je *H* neromální podgrupou *G*, potom se **faktorgrupou grupy G podle grupy H** nazývá struktura $(\{aH, a\in G\},\cdot)$, kde platí $aH\circ bH=(a\circ b)H$.
Například, faktorgrupou $(\mathbb{Z},+)$ podle $(3\mathbb{Z},+)$ je grupa $(\{a_{1,2}\}, mod\, 3)$.

Tělesa

Def: Nechť K je množina a
$+$, $\cdot$ jsou binární operace na K.
Těleso je pak struktura $(K, +, \cdot)$,
pokud splňuje následující axiomy:

(SA) Sčítání je asociativní.
Pro všechna $a, b, c \in K$ platí $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(SK) Sčítání je komutativní.
Pro všechna $a, b \in K$ platí $a+b=b+a$.

(S0) Nulový prvek (neutrální pro sčítání).
Existuje $0 \in K$ taková, že pro všechna $a \in K$ je $a+0=a$.

(SI) Inverzní prvek sčítání.
Pro každé $a \in K$ existuje $-a \in K$ tak, že $a+(-a)=0$.

(NA) Násobení je asociativní
Pro všechna $a, b, c \in K$ platí $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.

(NK) Násobení je komutativní
Pro všechna $a, b \in K$ platí $a \cdot b=b \cdot a$.

(N1) Jednotkový prvek (neutrální pro násobení):
Pro všechna $a \in K \setminus \{0\}$ existuje $a^{-1} \in K$ tak, že $a \cdot a^{-1}=1$.

(D) Distributivita sčítání a násobení
Pro všechna $a, b, c \in K$ platí $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$,

(01) Netrivialita
$0 \neq 1$.

Pozn., navíc máme požadavek uzavřenosti na sčítání a násobení, tedy
pro všechna $a, b \in K$ platí $a+b \in K$,
$a \cdot b \in K$.

Tvrz.: **Metatvrzení** (tvrzení o tvrzeních)
Všechny definice a věty o řešení soustav v maticové aritmetice nad reálnými čísly platí také pro libovolné těleso K, protože o $\mathbb{R}$ jsme využili pouze vlastnosti dané axiomy tělesa.

☼: $a \cdot 0=0$

Důkaz: $a \cdot 0 \overset{(S0)}{=} a \cdot 0+0 \overset{(SI)}{=} a \cdot 0+(a \cdot 0-a \cdot 0) \overset{(SA)}{=} (a \cdot 0+a \cdot 0)-a \cdot 0 \overset{(D)}{=} (a \cdot (0+0))-a \cdot 0 \overset{(S0)}{=} a \cdot 0-a \cdot 0 \overset{(SI)}{=} 0$, Q.E.D.

☼: $a \cdot (-1)=-a$

Důkaz: $a \cdot (-1) \overset{(NK)}{=} (-1) \cdot a \overset{(SI)}{=} (0-1) \cdot a \overset{(D)}{=} 0 \cdot a-1 \cdot a \overset{(N1),\text{předch.}}{=} 0-a \overset{(S0)}{=} -a$, Q.E.D.

☼: Pokud $a \cdot b=0$, pak buď $a=0$ nebo $b=0$.

Tvrz.: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ je těleso, právě když n je prvočíslo.

Def: **Charakteristika tělesa** je nejmenší n takové,
že $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}=0$.
Pokud takové n neexistuje, říká se, že těleso má charakteristiku 0.

Věta: Charakteristika tělesa je vždy 0 nebo prvočíslo.

Vektorové prostory

Def: **Vektorový prostor** nad tělesem *K* je $(V, +, \cdot)$, kde
V je množina vektorů,
$+$ je binární operace sčítní vektorů,
$\cdot$ je binární operace násobení vektoru skalárem z tělesa *K* (zobrazení $K \times V \to V$)
a platí následující axiomy:
(SK)
(SA)
(S0)
(SI)
(NA)
(N1)
(D1)
(D2)
Pozn., navíc máme požadavek uzavřenosti na sčítání a násobení, tedy
pro všechna $u, v \in V, a \in K$ platí $u + v \in V$ a
$a \cdot v \in V$.

Def: Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad *K* a
U je neprázdná podmnožina *V* tak,
že (1) pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in U$ je $\vec{u} + \vec{v} \in U$ a
(2) pro všechna $\vec{u} \in U, a \in K$ je $a \cdot \vec{u} \in U$.
Potom $(U, +, \cdot)$ nazýváme **podprostorem** *V*.

☼: Podprostor je též prostorem nad *K*.

Tvrz.: Nechť $(U_i, i \in I)$ je systém podprostorů vektorového prostoru *V*.
Potom průnik $\bigcap_{i \in I} U_i$ je též podprostorem *V*.

Def: Nechť *V* je vektorový prostor nad *K* a
X je podmnožina *V*.
Potom $\mathsf{L}(X)$ značí **podprostor generovaný** *X*, což je průnik všech podprostorů *V*, které obsahují množinu *X*.
Formálně $\mathsf{L}(X) := \bigcap \{U ; U \text{ podprostor } V, X \subseteq U\}$.
Také se nazývá **lineární obal množiny** *X*.

Def: (?) Nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ jsou vektory vektorvoého prostoru *V* nad tělesem *K*.
Vektor $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i$ se pak nazývá jejich **lineární kombinací**.

Tvrz.: Nechť *V* je vektorový prostor nad *K* a
$X \subseteq V$, tak
potom $\mathsf{L}(X)$ obsahuje právě všechny lineární kombinace prvků z *X*,
neboli $\mathsf{L}(X) = \{\vec{u} ; \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i ; n \in \mathbb{N}_0, \forall i : a_i \in K, x_i \in X\}$.

Def: **Podprostory určené maticí**
Nechť *A* je matice typu $m \times n$ nad tělesem *K*.
Sloupcový prostor $\mathsf{S}(A)$ je podprostor K^m generovaný sloupci *A*,
$\mathsf{S}(A) := \{\vec{u} \in K^m ; \vec{u} = A \cdot \vec{x} \text{ pro } \vec{x} \in K^n\}$.
Řádkový prostor $\mathsf{R}(A)$ je podprostor K^n generovaný řádky *A*,
$\mathsf{R}(A) := \{\vec{v} \in K^n ; \vec{v} = A^T \cdot \vec{y} \text{ pro } \vec{y} \in K^m\}$.
Jádro matice $Ker(A)$ je podprostor K^n tvořený všemi řešeními homogenní soustavy $A \cdot \vec{x} = 0$,
$Ker(A) := \{\vec{x} ; A \cdot \vec{x} = 0\}$.

☼: Elementární úpravy matice A nemění $Ker(A)$ ani $\mathsf{R}(A)$.

☼: Nechť $\vec{v} \in \mathsf{R}(A)$,
$\vec{x} \in Ker(A)$.
Potom $\vec{v}^T \cdot \vec{x} = 0$.

Lineární nezávislost

Def: Nechť V je vektorový prostor nad K.
Daná n-tice vektorů $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ se nazve
lineárně nezávislá, právě když rovnice $a_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + a_n \cdot \vec{v}_n = 0$ má pouze triviální řešení $a_1 = \ldots = a_n = 0$,
lineárně závislá jinak.

Pozn., (1) na pořadí vektorů nezáleží,
(2) jsou-li dva vektory shodné, je n-tice lineárně závislá, *BÚNO* lze předpokládat, že jsou odlišné,
(3) jakmile existuje $\vec{v}_i = 0$, je n-tice lineárně závislá,
(4) lze uvažovat množiny namísto n-tic.

Pozn., Lineární závislost znamená, že existuje netriviální řešení $a_1, \ldots, a_n$, kde $a_i \neq 0$.
Potom lze $\vec{v}_i$ vyjádřit pomocí ostatních: $\vec{v}_i = -\frac{a_1}{a_i} \cdot \vec{v}_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} \cdot v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} \cdot v_{i+1} - \ldots \frac{a_n}{a_i} \cdot \vec{v}_n$.

Def: O nekonečné množině řekneme, že je lineárně nezávislá, je-li každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá.

☼: Máme-li $X \subseteq Y$ množiny vektorů, pak platí
(1) X je $LZ \Rightarrow Y$ je LZ
(2) Y je $LN \Rightarrow X$ je LN.

Postup: Jak zjistit, zda je $X \subseteq K^n$ *LZ* či *LN*.
Označme prvky $X = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$.
Sestavíme z $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ matici $K^{m \times n}$ (vektory zapíšeme řádkově) a převedeme ji do odstupňovaného tvaru.
Dostaneme-li nulový řádek, X je *LZ*, jinak *LN*.

Def: **Báze prostoru** V je taková možina X, která je lineárně nezávislá a zároveň generuje celý prostor V ($\mathsf{L}(X) = V$).

Pozn., každý prvek prostoru lze složit z vektorů báze a toto vyjádření je jednoznačné.

Def: Nechť $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = X$ je uspořádaná báze vektorového prostoru V nad K.
Pro libovolný $\vec{u} \in V$ nazveme koeficienty $(a_1, \ldots, a_n)^T \in K^n$ z vyjádření $\vec{u} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + a_n \cdot \vec{v}_n$
vektorem souřadnic $\vec{u}$ vůči bázi X a označíme jej $[\vec{u}]_X$.

Tvrz.: Nechť X je taková množina, že $\mathsf{L}(X) = V$,
ale pro všechna $Y \subset X$ platí $\mathsf{L}(Y) \neq V$.
Potom X je báze.

Důsl.: Z každého konečného systému generátorů lze vybrat bázi.

Příklady vektorových prostorů a další

Trojrozměrný prostor: $K=\mathbb{R}^3$

(SK) checeme dokázat: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)\ \Rightarrow\ \underbrace{(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)\ \Leftarrow\ (v_1},_{z\ def.\Rightarrow\ sčítání\ skalárů\ je\ komutativní}v_2,v_3)+(u_1,u_2,u_3)=\vec{v}+\vec{u}$$

(SA) chceme dokázat: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)+(w_1,w_2,w_3)=(u_1+v_1+w_1,u_2+v_2+w_2,u_3+v_3+w_3)$ viz. výše.

(S0) chceme dokázat: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$

$$\vec{v}+\vec{0}=(v_1,v_2,v_3)+(0,0,0)=(v_1+0,v_2+0,v_3+0)=(v_1,v_2,v_3)=\vec{v}$$

(SI) chceme dokázat: $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

$$\vec{v}+(-\vec{v})=(v_1,v_2,v_3)+(-v_1,-v_2,-v_3)=(v_1-v_1,\ v_2-v_2,\ v_3-v_3)=(0,0,0)=\vec{0}$$

(NA) chceme dokázat: $a\cdot(b\cdot\vec{v})=(a\cdot b)\cdot\vec{v}$

$$a\cdot(b\cdot\vec{v})=a\cdot(b\cdot v_1,b\cdot v_2,b\cdot v_3)\ \Rightarrow\ (a\cdot b\cdot v_1,a\cdot b\cdot v_2,a\cdot b\cdot v_3)\ \Leftarrow\ a\cdot b\cdot(v_1,v_2,v_3)=(a\cdot b)\cdot\vec{v}$$

… a tak dále … U vek. prostoru na „běžných“ vektorech jsou tyto důkazy triviální.

Vektorový prostor polynomů: $V=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i\right\}$ (= polynom => sub: P_1, P_2, …)

Vektorový prostor regulérních matic: - je „ukázkový“, s vektory (reg. matice) pracujeme:
Sčítáme: $(A+B=C\Rightarrow c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j})$ a násobíme skalárem: $(n\cdot A=n\cdot a_{i,j})$, kde jsou A, B, C matice a $n\in\mathbb{N}$.

Podprostor

Podprostor vektor. prostoru V je podmnožinou $W\subseteq V$, která je vektor. prostorem vzhledem k $\vec{0}$, „+“ a „ · “ zděděným z V.
T. j. Platí $\forall a\in T\ \forall\vec{u},\vec{v}\in W:\ \vec{0}\in W,\ \vec{u}+\vec{v}\in W, a\cdot\vec{v}\in W$
Pozn.: Průnik libovolného souboru podprostorů vek. prost. V je opět podprostor.

Lineární obal

Je-li X podmnožina vek. prostoru V, podprostor generovaný X je průnik všech těch podprostorů W, které X obsahují.

<=>

LO podmnožiny X ve vek. prostoru V je roven množině všech lineárních kombinací vektorů množiny X s koeficienty z T.

Značíme: Span(x) ; $\langle x\rangle$; $[x]$

Příklady: Lineární obal dvou vektor v $\mathbb{R}^3$ bude rovina, u tří vektorů již celý prostor $\mathbb{R}^3$.

Lineární kombinace

$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ jsou vektory vek. prostoru V nad tělesem T. Vektor $\sum_{i=1}^{k}a_i\vec{v}_i$ se nazývá jejich lineární kombinací.

Lineární závislost a nezávislost

Vektory jsou lineárně nezávislé, pokud jejich lineární kombinace $\left(a_1\cdot\vec{v}_1+\ldots+a_n\cdot\vec{v}_n=\vec{0}\right)$ má pouze triviální řešení.
tj. vektory lze nakombinovat na nulu jen triviálním způsobem (vynásobením nulou).

Např: vektory $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$a\cdot(1,0,0)+b\cdot(0,1,0)+c\cdot(0,0,1)=(a,b,c)\neq\vec{0}$ => má pouze triviální řeš. => tyto vektory jsou lineárně nezávislé

Zkusme s vektory $\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{l}$.

$$\underbrace{a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}+d\cdot\vec{l}=a\cdot(1,}_{d\cdot\vec{l}=-a\cdot\vec{i}-b\cdot\vec{j}-c\cdot\vec{k}}0,0)+b\cdot(0,1,0)+c\cdot(0,0,1)+d\cdot(l_1,l_2,l_3)=(a+l_1\cdot d,b+l_2\cdot d,c+l_3\cdot d)\Rightarrow$$

hledáme netriviální řešení =>

$$a+l_1\cdot d=0\ \Rightarrow\ l_1=-\frac{a}{d}$$
$$b+l_2\cdot d=0\ \Rightarrow\ l_2=-\frac{b}{d}$$
$$c+l_3\cdot d=0\ \Rightarrow\ l_3=-\frac{c}{d}$$

$$\left.\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\}\textit{lineárně nezávislé}$$
$$\left.\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right\}\textit{lineárně závislé}$$

Vektory báze

Pokud B je soubor vektorů a splňuje span(B) = V, tak je B systém generátorů prostoru V.
Lineárně nezávislý systém generátorů vektorového prostoru V nazýváme báze prostoru V.

Dimenze a Kernel matice

Def: Buď A matice $m \times n$. vektorové prostory s ní spojené:

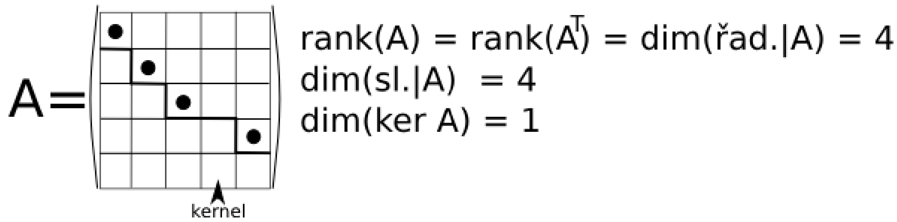
- **řádkový prostor** = podprostor K^n generovaný řádky A,
- **sloupcový prostor** = podprostor K^n generovaný sloupci A,
- **jádro** = podprostor K^n generovaný sloupci Ax = 0, označení Ker(A) (kernel).

Def: **Dimenze** matice vektorového prostoru V je mohutnost nějaké (a tedy libovolné) báze V.

Def: **Hodnost** matice A je definována jako dimenze jejího řádkového prostoru, a budeme jí značit rank(A).

Věta: $rank(AB) \leq rank(B)$

Věta: $dim(Ker\ A) + rank(A) = n$ pro každou matici A *s n* sloupci.



$$|báze(sl.|A)| = |báze(řád|A)| = dim(sl.|A) = dim(řád|A)$$

(důkaz na straně 9)

Steinitzova věta o výměně

Lemma:O výměně

Nechť $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ je systém generátorů vektorového prostoru *V* a $\vec{u}$ je libovolný vektor z *V*.

Potom pro všechna *i* taková, že existují $a_1, \dots, a_n; a_i \neq 0$, aby $\vec{u} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n$ platí, že $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{u}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n$ je systém generátorů prostoru *V*.

Důkaz: Vyjádříme $\vec{v} := \frac{1}{a_i} \cdot (u - a_1 \cdot v_1 - \dots - a_{i-1} \cdot \vec{v}_{i-1} - a_{i+1} \cdot \vec{v}_{i+1} - \dots - a_n \cdot \vec{v}_n)$.

Pro libovolné $\vec{w} \in V$ víme, že *n* lze vyjádřit jako kombinaci $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Dosazením za $\vec{v}_i$ získáme vyjádření $\vec{w}$ pomocí $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{u}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n$,

čili tyto tvoří systém generátorů.

Steinitzova věta o výměně

Nechť *V* je vektorový prostor,
$X \subseteq V$ je lineárně nezávislá a
Y je konečný systém generátorů *V*.

Potom platí $|X| \leq |Y|$ (mohutnost lineárně nezávislé množiny je menší nebo rovna mohutnosti množiny generující prostor)
a dokonce existuje $Z \subseteq V$ taková, že:

(a) $|Z| = |Y|$
(b) *Z* generuje *V*
(c) $X \subseteq Z$
(d) $Z \setminus X \subseteq Y$ (*X* je v *Z* a zbytek *Z* patří do *Y*)

Důkaz:

- Označme $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} := X \setminus Y$.
- Položme $Z_0 := Y$.
- Dále postupujeme indukcí pro $i = 1, \dots, n$:
  - Indukční předpoklad: Z_{i-1} generuje *V*.
  - Důkaz pro Z_i :
    Vyjádříme $\vec{u}_i$ vůči Z_{i-1} jako $\vec{u}_i = \sum_{\vec{w}_j \in Z_{i-1}} a_j \cdot \vec{w}_j$.
    Protože je *X* lineárně nezávislá, $a_j \neq 0$ pro $\vec{w}_j \notin X$ ($X \subseteq V$ je LN, existuje alespoň jeden nenulový koeficient prvku, který není z *X*).
  - Použijeme *Lemma o výměně*,
    položíme $Z_i := (Z_{i-1} \setminus \{\vec{w}_j\}) \cup \{\vec{u}_i\}$.
  - Na konci získáme $Z_n = Z$.
- Platí: (a), protože $|Y| = |Z_0| = |Z_i| = \dots = |Z_n| = Z$,
  (b) z lemmatu,
  (c), protože $(X \cap Y) \subseteq Z_0$ i ostatních Z_i . Ostatní $\vec{u}_i \in Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_n$ (přidávali jsme vždy pouze prvky z $X \setminus Y$).
  (d) vyplývá z algoritmu indukce.

Důsl.: Pokud má prostor *V* konečnou bázi, tak
potom mají všechny jeho báze stejnou mohutnost.

Důkaz: Mějme *X,Y* báze *V*.
X je lineárně nezávislá, *Y* generuje $V \Rightarrow |X| \leq |Y|$
Y je lineárně nezávislá, *X* generuje $V \Rightarrow |Y| \leq |X|$
Z těchto dvou nerovností vyplývá $|X| = |Y|$.

Důsl.: Pokud má prostor *V* konečnou bázi, tak
potom lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit na bázi.

Def: Nechť *V* má konečnou bázi.
Pak se o *V* říká, že je **konečně generovaný** a
počet prvků báze je **dimenze prostoru** *V*, značí se $dim(V)$.

☼: Je-li *W* podprostor *V*, pak $dim(W) \leq dim(V)$.

Věta: Platí $dim(U) + dim(V) = dim(U \cap V) + dim(L(U \cup V))$.

(součet dimenzí dvou prostorů
se rovná
součtu dimenze jejich průniku
a dimenze prostoru jimi generovaného)

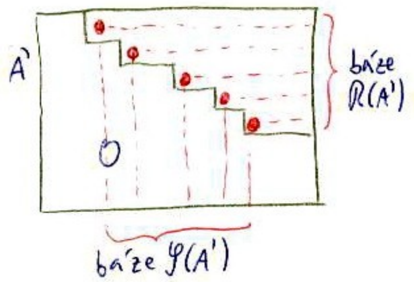
Dimenze sloupcového prostoru je rovna dimenzi řádkového prostoru matice.

Tvrz.: $dim(R(A)) = rank(A)$.
$A \simeq A'$ v odstupňovaném tvaru, $R(A) = R(A')$.
Nenulové řádky tvoří bázi $R(A)$ a
jejich počet je roven $rank(A)$.

Věta: Nechť A je matice typu $m \times n$ nad K, potom
platí $\boldsymbol{dim(R(A)) = dim(S(A))}$.

Plán: Chceme $dim(S(A)) = dim(R(A))$,
dokážeme $dim(S(A)) \overset{(1),(2)}{=} dim(S(A')) \overset{(3)}{=} dim(R(A')) \overset{(4)}{=} dim(R(A))$.

Důkaz: **(1)** Ukážeme, že při násobením matic zleva nevzroste dimenze sloupcového prostoru.
Mějme dány matice A, R.
Spočteme $A' := R \cdot A$ a označíme $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ sloupce A,
$\vec{u}_1', \ldots, \vec{u}_n'$ sloupce A'.
Platí $\vec{u}_i' = R \cdot \vec{u}_i$.
Mějme $\vec{w}' \in S(A')$ a $\vec{w} \in S(A)$.
Pak platí $\vec{w}' = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{u}_i' = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot R \cdot \vec{u}_i = R \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{u}_i = R \cdot \vec{w}$ (každý vektor z $S(A)$ je *„R-součinem“* vektoru z $S(A')$).
Vezměme báze $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d$ prostoru $S(A)$,
kde $d = dim(S(A))$.
Vyjádříme $\vec{w}$ vůči této bázi, čili $\vec{w} = \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot \vec{v}_i$.
Potom platí $\vec{w}' = R \cdot \vec{w} = R \cdot \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot R \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot \vec{v}'_i$, kde $\vec{v}'_i \in S(A')$.
(Vyjádříme vektory z $S(A')$ přes součin matice R s vektorem ze $S(A)$ a nakonec vůči bázi $S(A')$, na které pak vidíme, že má nejvíc d prvků)
Čili $\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_d$ tvoří systém generátorů $S(A')$ a z toho plyne, že
$dim(S(A')) \leq d = dim(S(A))$.
(2) Je-li R regulární, dimenze se nezmění, protože lze zapsat $A = R^{-1} \cdot A'$ a aplikovat postup z bodu (1).
Tedy dim(sl.|A)=dim(sl.|A').
(3) Pro matici A' v odstupňovaném tvaru platí dim(řád|A')=dim(sl.|A').
Důkaz obrázkem →
Pozn., zde $S(A')[\Leftrightarrow \text{dim(Sl.|A')}]$ obsahuje všechny vektory
ve tvaru $(x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0);\ x_i \in K$,
$d = rank(A')$



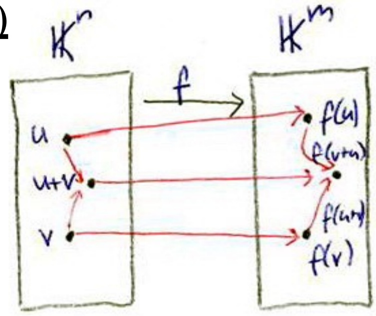
(4) Pro danou matici A nalezneme A' v odstupňovaném tvaru,
platí $A' = R \cdot A$, přičemž R je regulární.
Tudíž dim(řád|A')=dim(řád|A))
Teď máme, co jsme chtěli:
$$\text{dim(sl.|A)} \overset{(1),(2)}{=} \text{dim(sl.|A')} \overset{(3)}{=} \text{dim(řád|A')} \overset{(4)}{=} \text{dim(řád|A)}$$

Důsl.: **(1)** $rank(A) = rank(A^T)$,
(2) R je regulární a tedy $rank(A) = rank(R \cdot A) = rank(A \cdot R)$,
(3) $\text{sloupce}(A \cdot B) \subseteq \text{sloupce}(A)$ a $\text{řádky}(A \cdot B) \subseteq \text{řádky}(B)$
($\text{sloupce}(A \cdot B) = span(\vec{u} = A \cdot \vec{x};\ \vec{x}\, \text{sloupce}\, B) = \{\vec{u}' = A \cdot \vec{x}';\ \vec{x}' \in S(B)\} \subseteq S(A)$)
(4) $rank(A \cdot B) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$

Tvrz.: Pro matici A typu $m \times n$ platí $dim(Ker(A)) + rank(A) = n$.

Důkaz: $rank(A) = dim(R(A)) = \#$ nenulových řádků v $\underbrace{A'}_{\text{odstup.}} \simeq A = \#$ bázových proměnných soustavy$(A \cdot \vec{x} = 0) = s$
$dim(Ker(A)) =$ dimenze prostoru řešení $A \cdot \vec{x} = 0$,
víme, že každé řešení $A \cdot \vec{x} = 0$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci t vektorů, kde t je počet volných proměnných.
Pak $s + t = n$.

<u>**Lineární zobrazení** (homomorfismus)</u>



☼: Nechť $A \in K^{m\times n}$ a $f: K^n \to K^m$ je zobrazení definované předpisem: $f(u) = A\cdot\vec{u}$

Potom platí: $f(\vec{u}+\vec{v}) = A\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = A\cdot\vec{u} + A\cdot\vec{v} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
$f(a\cdot\vec{u}) = A(a\cdot\vec{u}) = a(A\cdot\vec{u}) = a\cdot f(\vec{u})$

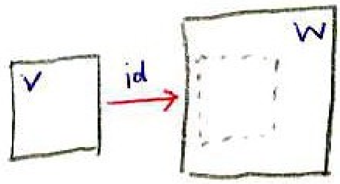
☼: Řešení soustav $A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ (odpovídající $f(\vec{x}) = \vec{b}$)odpovídá hledání $f^{-1}(\vec{b})$.

Def: Nechť V a W jsou vektorové prostory nad stejným tělesem K.

Zobrazení $f: V \to W$ se nazývá lineární zobrazení, pokud platí:

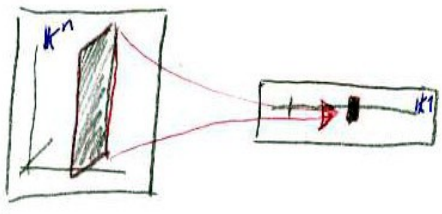
(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V:\ f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

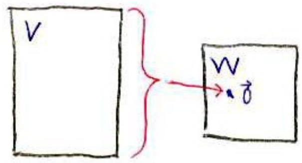
(2) $\forall \vec{u} \in V, \forall a \in K:\ f(a\cdot\vec{u}) = a\cdot f(\vec{u})$.



Příklady:

- Triviální zobrazení $f(v) = \vec{0} \in W$.
- Vnoření do nadprostoru $V \subseteq W$, $f = id$.
- Pro aritmetické vektorové prostory projekce p_i na i-tou souřadnici $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
- Další příklad:

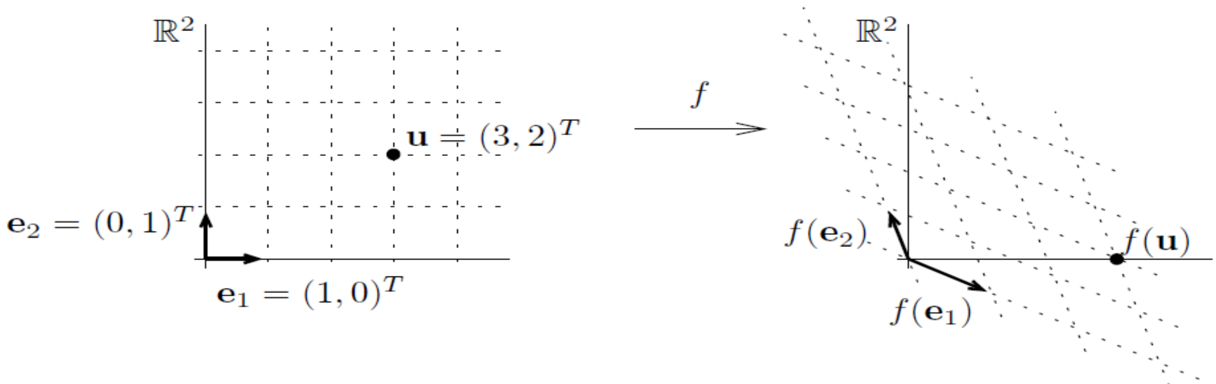




Nechť: V je prostor, X báze,
$n = dim(V)$,
$W = K^n$,
$f(\vec{u}) = [\vec{u}]_x$; $f: V \to K^n$

Pak:

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = [\vec{u}+\vec{v}]_x = [\underbrace{\overbrace{\sum a_i\cdot\vec{x}_i}^{\vec{u}=\sum a_i\cdot\vec{x}_i} + \overbrace{\sum b_i\cdot\vec{x}_i}^{\vec{v}=\sum b_i\cdot\vec{x}_i}}_{X=\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}}]_x = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_i+b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix} = [\vec{u}]_x + [\vec{v}]_x = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) .$$



- Geometrické zobrazení v rovině
  - posunutí není lineární zobrazení, protože všechny lineární zobrazení zachovávají počátek
  - osová souměrnost
  - rotace
  - stejnolehlost

  jsou lineární zobrazení, pokud zachovávají počátek
- Exotický příklad: derivace je lineární zobrazení v prostoru diferenciálních funkcí $\begin{pmatrix} (f+g)' = f' + g' \\ (a\cdot f)' = a\cdot f' \end{pmatrix}$

Věta: Nechť V a W jsou vektorové prostory nad K a
X je báze V.

Potom pro libovolné zobrazení $f_0: X \to W$ existuje právě jedno zobrazení $f: V \to W$ takové, že rozšiřuje f_0 , čili $f(\vec{v}) = f_0(\vec{v})$ pro všechna $\vec{v} \in X$.

Důkaz: Nechť $\vec{u}=\sum a_i\cdot\vec{v}_i; \vec{u}\in V$.

Potom $f(\vec{u})=f(\sum a_i\cdot\vec{v}_i) \underbrace{=}_{\text{vlastnost lin. zob.}} \sum a_i\cdot f(\vec{v}_i)=\underbrace{\sum a_i\cdot f_0(\vec{v}_i)}_{\text{jednoznačný výraz}}$

Důsl.: Označíme-li $f(V)=\{f(\vec{u});\vec{u}\in V\}$, pak platí, že $dim(f(V))\leq dim(V)$ (protože $f(\vec{v}_1),\dots,f(\vec{v}_n)$ je systém generátorů $f(V)$).

Def.: Mějme vektorové prostory *V* a *W* nad *K*,
$f:V\to W$ lineární zobrazení a
označme bázi *V* jako $X=(v_1,\dots,v_n)$ a
bázi *W* jako $Y=(w_1,\dots w_n)$.

Matici $[f]_{XY}$ sestavenou z vektorů souřadnic obrazů vektoru báze *X* vůči bázi *Y* nazýváme **maticí zobrazení *f* vzhledem k bázím *X* a *Y*.**

$$[f]_{XY}=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ [f(v_1)]_Y & [f(v_2)]_Y & \cdots & [f(v_n)]_Y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\in K^{m\times n}$$

☼: $[f(u)]_Y=[f]_{XY}\cdot[u]_X$

Důkaz:

- Vyjádříme $\vec{u}=\sum a_i\cdot\vec{v}_i$ a $[\vec{u}]_X=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- $f(\vec{u})=f(\sum a_i\cdot\vec{v}_i)=\sum a_i\cdot f(\vec{v}_i)$
- $[f(\vec{u})]_Y=[f(\sum a_i\cdot\vec{v}_i)]_Y=[\sum a_i\cdot f(\vec{v}_i)]_Y=\underbrace{\sum a_i}_{\text{součin}[\vec{u}]_X}\cdot\underbrace{[f(\vec{v}_i)]_Y}_{\text{a sloupce}[f]_{XY}}=[f]_{XY}\cdot[\vec{u}]_X$

☼: Složení lineárního zobrazení je také lineární zobrazení.
$f:U\to V$, $g:V\to W$ jsou lin. zob. $\Rightarrow(g\circ f):U\to W$ je lin. zob.

Důkaz: $(g\circ f)(\vec{w}+\vec{v})=g(f(\vec{u}+\vec{v}))=g(f(\vec{u})+f(\vec{v}))=g(f(\vec{u}))+g(f(\vec{v}))=(g\circ f)(\vec{u})+(g\circ f)(\vec{v})$

☼: Pokud navíc *X* je báze *U*,
Y je báze *V*,
Z je báze *W*,
též platí $[g\circ f]_{XZ}=[g]_{YZ}\cdot[f]_{XY}$

Důkaz: $[(g\circ f)(\vec{u})]_Z=[g\circ f]_{XZ}\cdot[\vec{u}]_X$

$[(g\circ f)(\vec{u})]_Z=[g(f(\vec{u}))]_Z=[g]_{YZ}\cdot[f(\vec{u})]_Y=[g]_{YZ}\cdot[f]_{XY}\cdot[\vec{u}]_X$

$\Rightarrow[g\circ f]_{XZ}=[g]_{YZ}\cdot[f]_{XY}$

Def: Nechť *X* a *Y* jsou dvě báze prostoru *V* konečné dimenze,
pak **maticí přechodu od báze *X* k bázi *Y*** rozumíme matici $[id]_{XY}$.

☼: $[id]_{XY}\cdot[id]_{YX}=[id]_{YY}=I_n\Rightarrow[id]_{YX}=([id]_{XY})^{-1}$

Postup: Výpočet matice přechodu pro aritmetické vektorové prostory $V=K^n$:

- Pro bázi $X=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ sestavíme matici $A=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$.
- Pro bázi $Y=(\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n)$ sestavíme matici $B=(\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n)$.
- Hledáme $[id]_{XY}$.
- Pro všechna $\vec{u}\in K^n$ platí $\vec{u}=\sum a_i\cdot\vec{u}_i=A\cdot[\vec{u}]_X$
  $\vec{u}=\sum b_i\cdot\vec{w}_i=B\cdot[\vec{w}]_Y$
- Z toho plyne $A\cdot[\vec{u}]_X=B\cdot[\vec{u}]_Y\Rightarrow[\vec{u}]_Y=\underbrace{B^{-1}\cdot A}_{[id]_{XY}}\cdot[\vec{u}]_X$.
- A máme výsledek: $[id]_{XY}=B^{-1}\cdot A$.
- Praktický postup: Matici zkonstruovanou z $(B|A)$ elementárními úpravami převedeme na $(I_n|[id]_{XY})$.

Důsledky: $[id]_{XK}=A$
$[id]_{KY}=B^{-1}$

Def: Lineární zobrazení $f:V\to W$, které je *prosté* a *na*,
se nazývá **izomorfismem prostorů *V* a *W*.**

☼: Inverzní zobrazení f^{-1} je také lineární zobrazení.

Důkaz:

- $f^{-1}:W\to V$, máme $\vec{w}=f(\vec{u}),\vec{w}'=f(\vec{u}')$ neboli $\vec{u}=f^{-1}(\vec{w}),\vec{u}'=f^{-1}(\vec{w}')$.
- Pak $f^{-1}(\vec{w}+\vec{w}')=f^{-1}(f(\vec{u})+f(\vec{u}'))=\underbrace{f^{-1}(f}_{\text{požere se}}(\vec{u}+\vec{u}'))=\vec{u}+\vec{u}'=f^{-1}(\vec{w})+f^{-1}(\vec{w}')$.
- Pro $f^{-1}(a\cdot\vec{w})$ podobně.

Tvrz.: Každý vektorový prostor dimenze *n* nad *K* je izomorfní vůči K^n

Důkaz: Zvolíme bázi *X*,
zobrazení $f:U\to[\vec{u}]_X$.
f je izomorfismem, protože souřadnice jednoznačně popisují vektory ve *V*: $[\vec{u}]_X\to U$.

Věta: Nechť *V* a *W* jsou prostory nad *K* s konečnými bázemi *X* a *Y*.
Platí, že $f:V\to W$ je izomorfní, právě když $[f]_{XY}$ je regulární.
Navíc platí $[f^{-1}]_{YX}=([f]_{XY})^{-1}$.

Důkaz: $\Leftarrow$ ověříme $[f]_{XY}$ regulární $\overset{?}{\Rightarrow}$ *f* je izomorfismus.

- Definujeme $g:W\to V$ pomocí matice $[g]_{XY}:=([f]_{XY})^{-1}$.
- $[(g\circ f)]_{XX}=[g]_{YX}\cdot[f]_{XY}=I_n=[id]_{XX};n=|X|$
- $\Rightarrow f$ je prosté, protože kdyby $f(\vec{u})=f(\vec{v})$ pro $\vec{u}\neq\vec{v}$, pak $\vec{u}=(g\circ f)(\vec{u})=(g\circ f)(\vec{v})=\vec{v}$, *spor.*
- $[f\circ g]_{YY}=[f]_{XY}\cdot[g]_{YX}=I_n=[id]_{YY};n=|Y|$
- $\Rightarrow f$ je na $\Rightarrow f$ je izomorfismus

$\Rightarrow$ ověříme *f* je izomorfismus $\overset{?}{\Rightarrow}[f]_{XY}$ je regulární (pozor na předpoklady vs. důsledky!):

- známe $f\Rightarrow[f]_{XY}\cdot[f^{-1}]_{YX}=[f\circ f^{-1}]_{YY}=[id]_{YY}=I_{n'};n'=|Y|$
- teď i $f^{-1}\Rightarrow[f^{-1}]_{YX}\cdot[f]_{XY}=[f^{-1}\circ f]_{XX}=[id]_{XX}=I_n;n=|X|$
- z předchozích dvou řádků vyplývá, že $[f]_{XY}$ a $[f^{-1}]_{YX}$ jsou vzájemně inverzní.

Pozn.: $dim(S(A))=dim(S(R\cdot A))$, kde *R* je regulární.
$f:U\to R\cdot U$ je izomorfismus mezi $S(A)$ a $S(R\cdot A)$.

Tvrz.: Nechť *V* a *W* jsou vektorové prostory nad *K*,
označme *Z* množinu všech lineárních zobrazení z *V* do *W*.
Definujeme součet zobrazení $\circ$ a skalární násobek zobrazení $\times$:

$$\forall f,g\in Z\ \forall\vec{x}\in V:(f\circ g)(\vec{x}):=f(\vec{x})+g(\vec{x})$$
$$\forall f\in Z\ \forall a\in K\ \forall\vec{x}\in V:(a\times f)(\vec{x}):=a\cdot f(\vec{x}).$$

Pak platí, že $(Z,\circ,\times)$ je vektorový prostor nad *K*.

Důkaz: Idea důkazu
(a) $f\circ g, a\times f$ zůstávají lineárními zobrazeními.
(b) Potřebujeme ověřit axiomy.
Je-li $dim(V)=m;dim(W)=n$,
potom *Z* je izomorfní s $K^{m\times n}$,
protože každé $f\in Z$ lze zapsat jeho maticí.

(Postup: Řešení rovnic s lineárními zobrazeními.)

Tvrz.: Nechť $f:V\to W$ je lineární zobrazení,
pak (a) $Ker(f):=\{x;f(x)=0\}$ je podprostorem *V*
(b) pokud rovnice $f(x)=b$ má alespoň jedno řešení *x*,
pak každé řešení *x* lze vyjádřit jako $x=x_0+x'$, kde $x'\in Ker(f)$.

Důkaz: (a)

- Mějme $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in Ker(f);a\in K$.
- $f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)=0+0=0\Rightarrow(\vec{x}_1+\vec{x}_2)\in Ker(f)$
- $f(a\cdot\vec{x}_1)=a\cdot f(\vec{x}_1)=a\cdot 0=0\Rightarrow(a\cdot\vec{x}_1)\in Ker(f)$
- Tedy $Ker(f)$ je podprostor.

(b)

- $f(\vec{x}-\vec{x}_0)=f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)=b-b=0\Rightarrow(\vec{x}-\vec{x}_0)\in Ker(f)$
- $\vec{x}':=\vec{x}-\vec{x}_0$.

Pozn., množina všech řešení $f(x)=b$ se zapisuje jako $x_0+Ker(f)$ a nazývá se **afinní prostor**.

Ukázkové příklady na lineární zobrazení

Zadání: Mějme vektorový prostor *V* pomocí lineární soustavy $(A|0) \simeq A \cdot \vec{v} = 0\,; v \in Ker(A)$.
Chceme určit bázi *V* (množinu lineárně nezávislých vektorů generující prostor *V*)
a dimenzi *V* (dimenze je rovna počtu vektorů báze).

Př. (1): Dán prostor $V = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{Z}_5^3 \mid A \cdot \vec{v} = 0 \right\}$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 4 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & \vec{v} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Vyřešíme soustavu lineárních rovnic:

(1) $v_3 = 0$

(2) $v_2 = t$, parametr (může být cokoliv a stejně řeší soustavu; volná proměnná v matici).

$v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 = 0$

(3) $v_1 + 2 \cdot t = 0$

$v_1 = 3 \cdot t$

Vektor řešení matice $(v_{1,} v_{2,} v_3)^T$ nám *tvoří* prostor *V* (díky parametru; nezaměňovat s generováním prostoru):

$$V = \left\{ (3 \cdot t, 2 \cdot t, 0)^T \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\} .$$

Bázi generující *V* získáme dosazením parametru, nejvhodnější je $t = 1$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimenze je pak $dim(V) = |B| = 1$.

Př. (2): Najděte bázi a dimenzi prostoru $V = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot \vec{v} = 0 \right\}$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & -6 & 7 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 15 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & |0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & |0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$

Vyřešíme soustavu lineárních rovnic:

(1) $v_4 = t$, parametr.

(2) $2 \cdot v_3 - 5 \cdot t = 0 \Rightarrow v_3 = \frac{5}{2} t$

(3) $v_2 + 2 \cdot t = 0 \Rightarrow v_2 = -2 \cdot t$

(4) $v_1 + 2 \cdot t = 0 \Rightarrow v_1 = -2 \cdot t$

Máme opět vektor řešení matice, $\left(-2 \cdot t, -2 \cdot t, \frac{5}{2} \cdot t, t\right)^T$.

Pak vektorový prostor je $V = \left\{ \left(-2 \cdot t, -2 \cdot t, \frac{5}{2} \cdot t, t\right)^T \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$,

bázi vytvoříme dosazením $t = 1$ jako $B = \left\{ \left(-2, -2, \frac{5}{2}, 1\right)^T \right\}$

a dimenze je $dim(V) = |B| = 1$.

Př. (3): Najděte dimenzi a bázi $V = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^7 \mid A \cdot \vec{v} = 0 \right\}$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Máme spoustu volných proměnných, označíme je zase jako parametry:

$$v_4 = p\,; v_5 = r\,; v_6 = s\,; v_7 = t$$

Vyřešíme soustavu lineárních rovnic:

(1) $v_3 + p = 0 \Rightarrow v_3 = \underbrace{(-1) \cdot p = p}_{\text{připomínám, jsme v } \mathbb{Z}_2^7}$

(2) $v_2 + v_3 + p + r + s + t = 0 \Rightarrow v_2 = r + s + t$

(3) $v_1 + p + s + t \Rightarrow v_1 = p + s + t$

Vektor řešení je $\vec{v}=(p+s+t\,, r+s+t\,, p\,, p\,, r\,, s\,, t)$.

Pak vektorový prostor je $V=\{(p+s+t\,, r+s+t\,, p\,, p\,, r\,, s\,, t)^T | p\,, r\,, s\,, t \in \mathbb{Z}_2\}$

Bázi vytvoříme postupným dosazováním parametrů:

(1) $p=1\,; r=s=t=0 \Rightarrow \vec{v}_p=(1,0\,,1\,,1,0\,,0\,,0)^T$

(2) $r=1\,; p=s=t=0 \Rightarrow \vec{v}_r=(0,1,0\,,0\,,1,0\,,0)^T$

(3) $s=1\,; p=r=t=0 \Rightarrow \vec{v}_s=(1,1\,,0\,,0,0\,,1\,,0)^T$

(4) $t=1\,; p=r=s=0 \Rightarrow \vec{v}_t=(1,1\,,0,0\,,0\,,0\,,1)^T$

Pak $B=\{\vec{v}_p\,, \vec{v}_r\,, \vec{v}_s\,, \vec{v}_t\}$.

Dimenze prostoru je $dim(V)=|B|=4$.

Zadání: Mějme daný vektorový prostor *V* pomocí množiny generáorů (vektorů). Chceme určit jeho bázi a dimenzi.

Př. (4): Pro prostor *W* nad $\mathbb{Z}_3$ generovaný $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$ najděte bázi a dimenzi.

Řešení: Zapíšeme vektory řádkově (budeme provádět řádkové úpravy):

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Takováto matice převedená do odstupňovaného tvaru obsahuje lineárně nezávislé vektory generující *W*, tedy jeho bázi.

Máme tedy $B=\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$ a $dim(W)=2$.

Př. (5): Pro prostor *W* nad $\mathbb{R}$ generovaný $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\0\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$, najděte bázi a dimenzi.

Řešení: Postup stejný jako u předchozího příkladu.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -4 & 0 & -10\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5\\ 0 & 0 & -4 & 0 & -10\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Báze je $B=\{(1,0\,,0,0\,,0)^T\,, (0,1\,,1\,,0,2)^T\,, (0,0\,, -2,0\,,5)^T\}$.

Dimenze je $dim(W)=3$.

Skalární součin

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Skalárním součinem na prostoru V nazveme každé zobrazení f množiny V x V do tělese T, které má následující vlastnosti:

(i) $(\vec{x}|\vec{y})=(\vec{y}|\vec{x}) \qquad \forall \vec{x},\vec{y}\in V$

(ii) $(\vec{x}+\vec{y}|z)=(\vec{x}|\vec{z})+(\vec{y}|\vec{z}) \qquad \forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$

(iii) $(a\cdot\vec{x}|\vec{y})=a\cdot(\vec{x}|\vec{y}) \qquad \forall \vec{x},\vec{y}\in V \quad \forall a\in T$

(iv) $(\vec{x}|\vec{x})>0 \qquad \forall \vec{x}\in V$

Norma vektoru: Značíme $\|\vec{v}\|$ a počítáme $\sqrt{(\vec{v}|\vec{v})}$. Normálový vektor pokud $\|\vec{v}\|=1$.

Cauchyova-Schwarzova nerovnost: $|(\vec{x}|\vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$

Důkaz: $(\vec{x}-a\cdot\vec{y}|\vec{x}-a\cdot\vec{y})\geq 0 \qquad (\|\vec{x}-a\,\vec{y}\|^2\geq 0) \qquad \neg(\vec{x}\perp\vec{y})$ násobíme vektor sebou samým

$(\vec{x}|\vec{x})-2\mathrm{a}(\vec{x}|\vec{y})+a^2(\vec{y}|\vec{y})\geq 0$

$a^2\cdot(\vec{y}|\vec{y})+a\cdot(-2\cdot(\vec{x}|\vec{y}))+(\vec{x}|\vec{x})\geq 0$ kvadratická rovnice v a => parabola v 1. nebo 2. kvad.

=> $\mathit{Diskriminant} \leq 0$

=> $4\cdot(\vec{x}|\vec{y})^2-4\cdot(\vec{y}|\vec{y})\cdot(\vec{x}|\vec{x})\leq 0$

$(\vec{x}|\vec{y})^2\leq(\vec{y}|\vec{y})\cdot(\vec{x}|\vec{x})$

$|(\vec{x}|\vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$

Využití: Usnadní práci např. s integrály.

Trojúhelníková nerovnost: $|(\vec{x}+\vec{y})|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

Z definice plyne: $\underbrace{\|(\vec{x}+\vec{y})\|^2}_{A}=\underbrace{(\vec{x}+\vec{y}|\vec{x}+\vec{y})}_{z\,def.\,normy}=\underbrace{(\vec{x}|\vec{x})+(\vec{x}|\vec{y})+(\vec{y}|\vec{x})+(\vec{y}|\vec{y})}_{z\,(ii)\,bodu\,def.}=\underbrace{\|\vec{x}\|^2+2\cdot(\vec{x}|\vec{y})+\|\vec{y}\|^2}_{z\,(i)\,bodu\,def.}$

Dosadíme dle Cauchyova-Schwartzovy ner.: $(\vec{x}|\vec{y})\leq|(\vec{x}|\vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$

Sestavíme tedy nerovnost: $\overbrace{\|(\vec{x}+\vec{y})\|^2}^{A} \leq \|\vec{x}\|^2+2\cdot\overbrace{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}^{C-S\ ner.}+\|\vec{y}\|^2 = \overbrace{(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2}^{vzorecek}$

$$\|(\vec{x}+\vec{y})\|^2\leq(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \|(\vec{x}+\vec{y})\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$$

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

- umožňuje nám z libovolné báze vytvořit bázy ortogonalní
- vyjadřume vektory pomocí normálového