Diskrétní matematika

látka z

I. semestru informatiky MFF UK

Zpracovali:

Ondřej „Keddie“ Profant,
Jan „Zaantar“ Štětina

Obsah

Binární relace

Def: Mějme množiny X, Y.
Kartézský součin je $X \times Y = \{ \underbrace{(x, y)}_{\text{uspořádané}} ; x \in X, y \in Y \}$.

Def: **Binární relace** na množinách X, Y je libovolná podmnožina $X \times Y$.

Def: **Skládání relací** $R \subseteq X \times Y$ a
$S \subseteq Y \times Z$
je $R \circ S \subseteq X \times Z$ taková, že $\{(x, z); x \in X, z \in Z\}$ a
pro všechna $(x, y) \in R \circ S$ existuje $y \in Y$ tak, aby $(x, y) \in R, (y, z) \in S$.

Zobrazení

Def: **Zobrazení** z množiny X do množiny Y je
binární relace $f \subseteq X \times Y$ taková,
že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, aby $(x, y) \in f$.
Píšeme $f(x) = y$ nebo $f : X \to Y$.

Def: Zobrazení je
prosté (injektivní), pokud pro všechna $x_1, x_2 \in X$ platí, že
pokud $f(x_1) = f(x_2)$, pak nutně i $x_1 = x_2$.
(dvě rozdílná x se nezobrazí do jednoho y)
na (surjektivní), pokud pro každé $y \in Y$ existuje nějaké $x \in X$ tak, že $f(x) = y$.
(pro každé y existuje nějaké x)
vzájemně jednoznačná (bijektivní),
pokud *f* je zároveň prosté a na,
tedy pro každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ tak, že $f(x) = y$.

☼: Mějme *X, Y* konečné množiny a $f : X \to Y$ bijektivní,
potom $|X| = |Y|$.
Naopak, pro konečné $|X| = |Y|$
je $f : X \to Y$ prostá, právě když je na.

Tvrz.: Počet podmnožin konečné *n*-prvkové množiny *X* je roven 2^n. (viz. Kapitoly z DM str. 70-71)

Tvrz.: Počet podmnožin konečné neprázdné *n*-prvkové množiny *X*, které mají sudou (resp. lichou) mohutnost, je 2^{n-1}.

Tvrz.: Počet podmnožin konečné *n*-prvkové množiny *X* mohutnosti *k* je $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Def: Relace $R \subseteq X \times X$ je
reflexivní, pokud pro všechna $x \in X$ platí, že $(x, x) \in R$,
symetrická, pokud pro všechna $x, y \in X$ platí, že pokud $(x, y) \in R$, pak i $(y, x) \in R$,
antisymetrická, pokud pro všechna $x, y \in X$ platí, že pokud zároveň $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$, pak nutně $x = y$,
tranzitivní, pokud pro všechna $x, y, z \in X$ platí, že je-li $(x, y) \in R$ a zároveň $(y, z) \in R$, pak nutně $(x, z) \in R$.

Def: **Ekvivalence** na množině *X* je
relace $R \subseteq X \times X$,
která je reflexivní,
symetrická a
tranzitivní.
Částečné uspořádání na množině *X* je
relace $S \subseteq X \times X$,
která je reflexivní,
antisymetrická a
tranzitivní.

Def: Mějme ekvivalenci $R \subseteq X \times X$,
$x \in X$.

Třída ekvivalence *R* příslušející prvku *x*
je $R[x]=\{y\in X\,;(x,y)\in R\}$.

Tvrz.: Je-li $R\subseteq X\times X$ ekvivalence na *X*, potom
(1) pro všechna $x\in X$ je $x\in R[x]$,
(2) pro všechna $x,y\in X$ je buď $R[x]=R[y]$
anebo $R[x]\cap R[y]=\emptyset$,
(3) třídy ekvivalence jednoznačně určují *R*.

Tvrz.: Množina *k*-prvkových podmnožin *n*-prvkové množiny *X*,
kde $0\le k\le n$,
$$\{Y\,;Y\subseteq X\,,|Y|=k\}=\binom{X}{k},$$
má počet prvků $\left|\binom{X}{k}\right|=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}=\binom{|X|}{k}$.

Důsl.: Pro $n\in\mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

Tvrz.: Mějme $k\,,n\in\mathbb{N}$.
Potom platí
(1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$,
(2) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$,
(3) Je-li $0<k<n$, pak
$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

Věta: **Binomická věta**
Mějme $n\in\mathbb{N}$,
pak $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ (kde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$)

Důkaz:

Pomocné výpočty:
$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k+1)!}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{n+1}{(n-k)\cdot(k+1)}=\frac{n+1!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

Důkaz matematickou indukcí
(1.) indukční krok: pro $n=1$
$$(x+y)^1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k=1\cdot x^1\cdot y^0+1\cdot x^0\cdot y^1=x+y$$
(2.) indukční krok: pro $n\ge 2$,
předpokládáme, že platí pro n ,
dokážeme pro $n+1$:
$$(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k=$$
Použijeme indukční předpoklad:
$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right]\cdot(x+y)=$$
Roznásobíme *x* a *y:*
$$=x\cdot\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right]+y\cdot\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right]=$$
Přidáme *x* a *y* do sum:
$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k\right]+\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}\right]=$$
Substituce: $l=k+1$
(intervaly sum musí být stejné, takže posuneme horní mez):
$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k\right]+\sum_{l=1}^{n+1}\left[\binom{n}{l-1}x^{\overbrace{n-l+1}^{n-(l-1)}}y^l\right]=$$
Vyjádříme *n+1* člen zvlášť (opět změna intervalů sum):
$$=x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k\right]+\sum_{l=1}^{n}\left[\binom{n}{l-1}x^{n-l+1}y^l\right]=$$

Sečteme sumy (vytkneme v nich nekombinační čísla):

$$=x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^{n-k+1}y^{k}\right]\Rightarrow$$

Platí pro dolní „vetší a menší“, což máme:

$$\Rightarrow\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\Leftrightarrow\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}\Rightarrow\binom{n+1}{k}$$

Dosadíme:

$$x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}y^{k}\right]=$$

A konečně, rozšíříme interval sumy o krajní hodnoty.

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}y^{k}\right]$$ QED.

Tvrz.: Mějme *X, Y* jsou konečné a neprázdné množiny,
$|X|=m, |Y|=n$.
Potom počet všech zobrazení $X\rightarrow Y$ je n^m .

Důkaz: Označme $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ a $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, potom znázorněme:

$x_1\rightarrow n\times$ mohu zobrazit do Y
$x_2\rightarrow n\times$ mohu zobrazit do Y
$\vdots$
$x_m\rightarrow n\times$ mohu zobrazit do Y

==>> $\# X\rightarrow Y=n^m$

Tvrz.: Mějme *X, Y* jsou konečné a neprázdné množiny,
$|X|=m, |Y|=n$, kde $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ a $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.
Potom počet všech *prostých* zobrazení $X\rightarrow Y$ je $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)$.

Důkaz: Označme $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ a $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ a postupujme jako při předešlém důkazu:

$x_1\rightarrow\ n\times$ mohu prostě zobrazit do Y
$x_2\rightarrow(n-1)\times$ mohu prostě zobrazit do Y
$\vdots$

Avšak zde narazíme na dva případy: $m\leq n$ a $n>m$. $m\leq n$: poslední zobrazení bude n - (m+1) krát = n - m -1 ==>>
\# prostých $X\rightarrow Y=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$; druhý případ je stejný jako první (0-krát nás nezajímá) .

Tvrz.: Mějme *X, Y* jsou konečné a neprázdné množiny,
$|X|=m, |Y|=n$,
$f: X\rightarrow Y$ zobrazení.
Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:
(1) *f* je bijekce,
(2) *f* je prosté a $|X|=|Y|$,
(3) *f* je na a $|X|=|Y|$.
Důkaz: Triviální, z definice bijekce.

Důsl.: Mějme *X, Y* jsou konečné a neprázdné množiny,
$|X|=|Y|=n$.
Potom počet vzájemně jednoznačných zobrazení $X\rightarrow Y$ je $n!$. (viz důkaz tvrzení o prostých zobrazeních výše)

Def: **Permutace** množiny *X* je bijekce $X\rightarrow X$.
$S_n=\{\pi ; \pi \text{ permutace na } \{1,\ldots,n\}\}$.

Tvrz.: Nechť $n\in\mathbb{N}$,
$A_1,\ldots,A_n$ jsou konečné množiny a
$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.
Potom existuje $i\in\{1,\ldots,n\}$ takové, že $|A_i|\geq\frac{|A|}{n}$.

Důkaz: pro spor předpokládejme: $\forall i$: $|A_i|<\frac{|A|}{n}$

$|A|=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{n}A_i\right|<n \quad \Rightarrow|A|<|A| \quad \Rightarrow$ spor!

Grafy

Def: Graf je struktura $G=(V, E)$, kde
V je konečná neprázdná množina **vrcholů** a
E je množina **hran**, podmnožina $\binom{V}{2}$.

Def: Mějme $G=(V_G, E_G)$, $H=(V_H, E_H)$.
Zobrazení $f: V_G \rightarrow V_H$ je **izomorfismus** G a H,
pokud f je bijekce V_G na V_H a
pro všechna $u, v \in V_G; u \neq v$ platí ekvivalence $\{u, v\} \in E_G \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_H$
(v G existuje hrana mezi vrcholy u,v, právě když existuje hrana mezi jejich obrazy v H)
Píšeme $f: G \rightarrow H$.
Platí, že G a H jsou izomorfní, právě když existuje zobrazení f izomorfní na H.

Def: Mějme $G=(V_G, E_G)$, $H=(V_H, E_H)$. Potom:
H je **podgrafem** G, pokud
$V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq E_G$.
Pak píšeme $H \subseteq G$.
H je **indukovaným podgrafem** G, pokud
$V_H \subseteq V_G$ a $E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2}$ (hrany indukovaného podgrafu H jsou právě všechny hrany z G, jejichž vrcholy jsou i v H).

Tvrz.: (1) Počet (jakýchkoliv) grafů na množině $\{1,2,\ldots,n\}$ je právě $2^{\binom{n}{2}}$.

(2) Počet navzájem neizomorfních grafů na množině $\{1,2,\ldots,n\}$ je alespoň $\dfrac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$.

Důkaz:

(1) Máme $V=\{1,\ldots,n\}$ a
$E \subseteq \binom{V}{2}$.
Víme, že $\left|\binom{V}{2}\right| = \binom{n}{2}$.
Různých podmnožin $\binom{V}{2}$ je $2^{\binom{n}{2}}$.

(2) Vezměme $G_n = \{G=(\{1,\ldots,n\}, E)\}$ (G_n budiž množina grafů na n vrcholech).
Platí, že G je izomorfní s H, pokud platí:
(1) reflexivita $id: \{1,\ldots,n\} \rightarrow \{1,\ldots,n\}$,
(2) symetrie $f: G \rightarrow H$ izomorfismus,
$f^{-1}: H \rightarrow G$ izomorfismus,
(3)tranzitivita $(f: G \rightarrow H \text{ izomorfní}) \wedge (g: H \rightarrow J \text{ izomorfní}) \Rightarrow (g(f): G \rightarrow J \text{ izomorfní})$
Budiž $G \in G_n$ a
R rozkladová třída z prvku G: $R_G = \{H \in G_n; H \simeq G\}$.
Pak $|R_G| \leq n!$ a
počet různých rozkladových tříd je alespoň $2^{\binom{n}{2}}$.
V každé zvolíme jeden prvek, zvolené pak budou navzájem neizomorfní.

Def: **Důležité grafy**, které mají speciální název: (více viz. Kapitoly z DM str. 113)
1) **Úplný graf** $K_n = (\{1,2,\ldots,n\}, \binom{V}{2})$
2) **Prázdný graf** $E_n = (\{1,2,\ldots,n\}, \emptyset)$
3) **Cesta** $P_n = (\{1,2,\ldots,n\}, \{\{i, i+1\}; i=1,\ldots,n-1\})$
4) **Kružnice** $C_n = (\{1,2,\ldots,n\}, \{\{i, i+1\}; i=1,\ldots,n-1\} \cup \{\{1,n\}\})$

Délkou cesty nebo kružnice rozumíme počet hran.

Def: Graf $G=(V, E)$ je **bipartitní** pokud
existují $A, B \subseteq V$ takové, že $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = V$ a
a pro všechna $e \in E$ je $|e \cap A| = |e \cap B| = 1$ (hrana vede mezi jedním vrcholem z A a druhým z B).

☼: Kružnice C_n je bipartitní právě když n je sudé.

Def: **Úplný bipartitní graf** je $K_{m,n}$, kde:

$|A|=m$, $A=\{a_1,\dots,a_m\}$,
$|B|=n$, $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ a
$E=\{\{a_i,b_j\};i=1,\dots,m;j=1,\dots,n\}$.

Grafové operace

Def: Grafové operace (viz. Kapitoly z DM str. 148)

1) Odebrání hrany $e\in E$ $G-e=(V,E\setminus\{e\})$
2) Přidání hrany $e'\in\binom{V}{2}\setminus E$ $G+e'=(V,E\cup\{e'\})$
3) Odebrání vrcholu $v\in V$ $G-v=G[V\setminus\{v\}]$ (indukovaný podgraf bez vrcholu v)
4) Přidání vrcholu $v'\notin V$ $G+v'=(V\cup\{v'\},E)$
5) Dělení hrany $e=\{x,y\}\in E$ $G\,\%\,e=(V\cup\{w\},(E\setminus\{e\})\cup\{\{x,w\},\{w,y\}\})$
(přidáme dvě nové hrany)
6) Kontraktce hrany $e=\{u,v\}\in E$
$G\cdot e=((V\setminus\{u,v\})\cup\{w\},E')$

$$E'=\overbrace{\{e\in E;u,v\notin e\}}^{\text{hrany z E, které neobsahují u,v}}\cup\overbrace{\{\{x,w\};\{x,u\}\in E\}}^{\text{hrany mezi w a vrcholy, ktré dříve měly hranu s u}}\cup\overbrace{\{\{y,w\};\{y,v\}\in E\}}^{\text{hrany mezi w a vrcholy, ktré dříve měly hranu s v}}$$

(„Odebereme jednu hranu a její dva vrcholy. Všechno, co vedlo do těchto vrcholů svedeme do jednoho nového.“)

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

☼: Máme-li graf $G=(V,E)$,
hranu $e\in E;e'\in\binom{V}{2}\setminus E$ a
vrchol $v\in V,v'\notin V$, pak

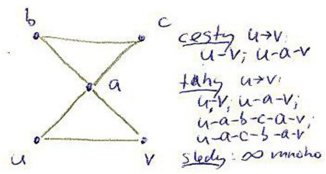
(1) $(G-e)+e\simeq G$
(2) $(G+e')-e'\simeq G$
(3) $(G-v)+v\simeq G$, pouze pokud vrchol v není obsažen v žádné hraně z E.
(4) $(G+v')-v'\simeq G$

Def: Mějme $G=(V,E)$ a
$u,v\in V$.
Pak definujeme následující pojmy:

Cesta z u do v (nesmí se opakovat hrana ani vrchol)
je posloupnost vrcholů a hran $(u=v_0),e_1,v_1,e_2,v_2,\dots,e_k,(v_k=v)$,
kde $e_i=\{v_{i-1},v_i\};\ i=1,2,\dots,k$ (každá hrana e_i spojuje vrcholy v_{i-1} a v_i)
a pro všechny vrcholy v_i,v_j při $i,j\in\{0,\dots,k\},i\neq j$
platí $v_i\neq v_j$. (každý vrchol se v cestě vyskytne nanejvýše jednou (tím pádem i každá hrana))

Tah z u do v (nesmí se opakovat hrana)
je posloupnost vrcholů a hran $(u=v_0),e_1,v_1,e_2,v_2,\dots,e_e,(v_e=v)$,
kde $e_i=\{v_{i-1},v_i\};\ i=1,2,\dots,e$
a pro všechny hrany e_i,e_j při $\forall i,j\in\{1,\dots,e\},i\neq j$
platí $e_i\neq e_j$. (každá hrana se v tahu vyskytne nanejvýš jednou, pro vrcholy to již neplatí)

Tak je **uzavřený**, pokud $v_0=v_e$.



Sled z u do v (cokoliv se může opakovat)
je posloupnost vrcholů a hran $(u=v_0),e_1,v_1,e_2,v_2,\dots,e_m,(v_m=v)$,
kde $e_i=\{v_{i-1},v_i\};\ i=1,2,\dots,m$.

Tvrz.: Mějme $G=(V, E)$ a $u, v \in V$.
Jestliže existuje sled z *u* do *v*,
potom existuje i cesta z *u* do *v*.

Důkaz: Existuje sled z *u* do *v*.
Vezměme $(u=v_0), e_1, v_1, \ldots, e_m, (v_m=v)$ nejkratší sled z *u* do *v*.
Pak tento sled je cesta.
Důkaz sporem:
Podmínky sledu – splněny.
Pokud tento sled není cesta, pak existuje $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ takové,
že $i < j$ a zároveň $v_i = v_j$.
V tom případě $(u=v_0), e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \ldots, e_m, (v_m=v)$, kde
$e_{j+1} = \{v_j, v_{j+1}\} = \{v_i, v_{j+1}\}$,
je sled délky $m-(j-i) < m$,
což je kratší než nejkratší, *SPOR*.

Def: Mějme $G=(V, E)$ a $u, v \in V$. Pak je
vzdálenost $d(u, v)$ délka nejkratší cesty z *u* do *v*, pokud taková cesta existuje,
jinak $d(u, v) = \infty$.

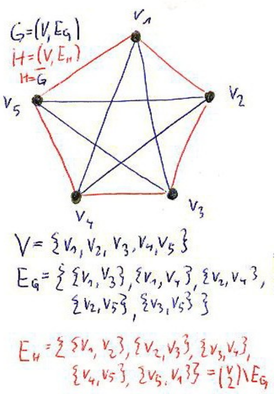
Tvrz.: Takto zavedená vzdálenost v grafu je **metrika**: („Funkce, která dosadí k vrcholu nejkratší vzdálenost.")

1) $\forall u, v \in V: \ d(u, v) \geq 0 \wedge (u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ … pokud je vzdálenost = 0, jedná se o stejný bod
2) $\forall u, v \in V: \ d(u, v) = d(v, u)$ … vzdálenost musí být symetrická
3) $\forall u, v, w \in V: \ d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ … trojúhelníková nerovnost

Důkaz: (1) $\infty \geq 0$,
(2) ok,
(3) Mějme $(u=v_0), e_1, v_1, \ldots, e_k, (v_k=w)$ nejkratší cestu z *u* do *w*, kde $d(u, w) = k$, a
$(w=v'_0), e'_1, v'_1, \ldots, e'_{k'}, (v'_{k'}=v)$ nejkratší cestu z *w* do *v*, kde $d(w, v) = k'$.
Pak $(u=v_0), e_1, v_1, \ldots, e_k, (v_k=w=v'_0), e'_0, v'_1, \ldots, e'_{k'}, (v'_{k'}=v)$ je sled z *u* do *v* délky $k+k' \geq d(u, v)$.

Def: Graf $G=(V, E)$ je **souvislý**, pokud pro všechna $u, v \in V$ existuje cesta z *u* do *v*, tedy $d(u, v) \leq \infty$.
Jinak říkáme, že je **nesouvislý**.

Tvrz.: Nechť $G=(V, E)$ je graf,
$|V| \geq 3$ (alespoň tři vrcholy).
Pokud existují $u, v \in V$, $u \neq v$ takové, že $G-u$ a $G-v$ jsou souvislé,
potom *G* je souvislý.



Důkaz: Mějme $x, y \in V$.
(1) Pokud $\{x, y\} \neq \{u, v\}$,
BÚNO předpokládejme, že $x, y \notin \{u, v\}$.
Pak $x, y \in V_{G-u}$.
Je-li $G-u$ souvislý, pak existuje cesta z *x* do *y* v $G-u$ a
tudíž existuje cesta z *x* do *y* v *G*.
(2) Pokud $x=u$, $y=v$,
víme, že *G* má alespoň tři vrcholy.
Proto existuje $w \in V$, $w \neq u$, $w \neq v$ takové, že
u, *w* jsou spojeny cestou v $G-v$ a tedy existuje cesta z *u* do *w* v *G*, a
w, *v* jsou spojeny cestou v $G-u$ a tedy existuje cesta z *w* do *v* v *G*.
Z toho plyne, že existuje sled z *u* do *v* v *G*, tedy existuje cesta t *u* do *v* v *G*.

Tvrz.: Nechť $G=(V, E)$ je graf,
$|V| \geq 3$.
Pokud *G* je souvislý,
potom existují $u, v \in V$, $u \neq v$ takové, že $G-u$ a $G-v$ jsou souvislé.

Důkaz: Vezměme *u, v* taková, že $d(u, v)$ je maximální.
Pro spor, nechť $G-u$ není souvislý.
Pak existují $x, y \in V \setminus \{u\}$ taková, že neexistuje cesta z *x* do *y* v $G-u$.
Ale protože je *G* souvislý, víme, že existuje cesta z *x* do *y* v *G* a
navíc na každé cestě z *x* do *y* v *G* leží vrchol *u*.

Platí tedy $d(x,u)+d(u,y)=d(x,y)$.
Budiž P_x nejkratší cesta z x do v v G,
P_y nejkratší cesta z y do v v G.
Pak $d(u,v)\geq d(x,v)$ a
$d(u,v)\geq d(y,v)$ v G.
Z toho plyne, že $u\notin V_{P_x}$, jinak by $d(u,v)<d(x,v)$, a podobně
$u\notin V_{P_y}$.
P_x, P_y jsou tedy cesty i v $G-u$.
Spojením P_x a P_y získáme sled z x do y v $G-u$,
tedy existuje cesta z x do y v $G-u$, *SPOR.*

Def: **Doplněk grafu** $G=(V,E)$ je
graf $\bar{G}=(V,\bar{E})$,
kde $\bar{E}=\binom{V}{2}\setminus E$
Česky: Doplněk grafu obsahuje všechny vrcholy z grafu a právě ty hrany, které mezi vrcholy v grafu *nejsou*.

Def: **Stupeň vrcholu** $v\in V$ v grafu $G=(V,E)$
je $deg(v)=|\{e;v\in e\in E\}|$ (počet hran v grafu, které obsahují daný vrchol).

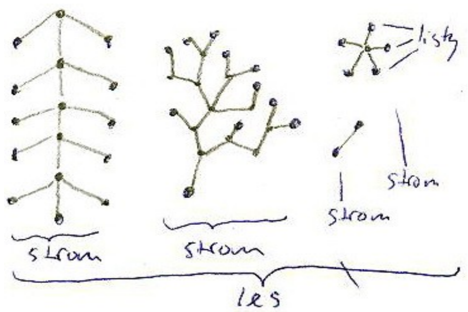
☼: $\sum_{v\in V} deg(v)=2\cdot|E|$

Stromy

Def: Graf $G=(V,E)$ je

strom, pokud nemá kružnici a je souvislý.
Obvykle značíme jako graf T.

les, pokud nemá kružnici.



Def: **List** je $v\in V$ takový, že $deg(v)=1$ (obsahuje ho pouze jedna hrana).

Lemma: Každý konečný strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva listy.

Důkaz: Nechť $|V|=n$,
pro všechna $u,v\in V$ je vzdálenost $d(u,v)\leq n-1$.
Vezměme relaci takovou, že $d(u,v)$ je maximální, a tedy $u\neq v$.
u' Budiž soused u na pevně zvolené nejkratší cestě z u do v.

Pro spor, ať $deg(u)>1$ a tedy ať existuje $u''\neq u', \{u',u''\}\in E$ takové, že $d(u'',v)\leq d(u,v)$ (viz. obrázek).
Pak u neleží na nejkratší cestě z u' do v.
Z toho plyne, že G obsahuje kružnici, a tedy není strom, *SPOR*.

Lemma: Nechť $G=(V,E)$ je strom,
$v\in V$ je list.
Potom $G\setminus v$ je také strom.

Důkaz: (1) Dvě možnosti:
(a) $G\setminus v$ nemá kružnici... ok.
(b) $G\setminus v$ má kružnici, pak i G má kružnici, *SPOR*.
(2) Dvě možnosti:
(a) $G\setminus v$ je souvislý... ok.
(b) $G\setminus v$ není souvislý,
pak existují $u,w\in V\setminus\{v\}$ takové, že neexistuje cesta z u do w v $G\setminus v$.
Pokud v G existuje cesta z u do w, pak v musí nutně ležet na této cestě.
Pak by muselo být $deg(v)\geq 2$, což je *SPOR*, protože by v nebyl list.

Lemma: Nechť $G=(V,E)$ je graf,
$v\in V$ je list.
Potom platí, že pokud $G\setminus v$ je strom, tak i G je strom.

Důkaz: (1) *G* je souvislý (důkaz obrázkem).
(2) *G* neobsahuje kružnici.
Pro spor, ať *G* obsahuje kružnici *C*.
$G \setminus v$, ji nemá, protože je strom,
takže musí být $v \in V_C$ a tedy $deg(v) \geq 2$, *SPOR*.

Důsl.: Mějme $G = (V, E)$ graf,
$v \in V$ list, tedy $deg(v) = 1$.
Pak platí, že *G* je strom, právě když $G \setminus v$ je strom.

Tvrz.: **Ekvivalentní charakteristika stromů** (viz. Kapitoly z DM str. 162)
Nechť $G = (V, E)$ je graf,
$|V| \geq 2$.
Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:
1) **Definice stromu** — *G* je strom (souvislý, bez kružnice)
2) **Jednoznačnost cesty** — Pro všechna $u, v \in V$ právě jedna cesta z *u* do *v*.
3) **Minim. souvislost G** — *G* je minimální souvislý (tj. pokud odebereme libovolné $e \in E$, bude $G \setminus e$ nesouvislý).
4) **Maxim. G bez kružnice** — Pro všechna $e' \notin E$ bude $G \cup e'$ (přidáním libovolné hrany) obsahovat kružnici.
5) **Eulerův vzorec** — *G* je souvislý a $|V| = |E| + 1$ (má o jeden vrchol víc, než hran).
6) Bez názvu (?) — *G* je bez kružnice a $|V| = |E| + 1$.

Důkazy:

(1) ⇒ (2) „Pokud *G* je souvislý, tak existuje právě jedna cesta z *u* do *v*."
Pro spor, nechť existují dvě cesty P_1, P_2 z *u* do *v*,
x je poslední společný vrchol cesty P_1, P_2 a
y je rvní vrchol za *x* po P_1 ,který také leží na P_2 .
Pak úseky P_1 a P_2 mezi *x* a *y* tvoří kružnici, což je *SPOR*.

(2) ⇒ (3) Víme, že *G* je souvislý.
Pro spor, nechť existuje $e \in E, e = \{a, b\}$ taková, že $G \setminus e$ je stále souvislý.
Pak existuje cesta *P* z *a* do *b* v $G \setminus e$, a
tedy $e \notin E_P$.
Víme, že a, e, b je cesta z *a* do *b* v *G*.
Z toho plyne, že existují alespoň dvě cesty z *a* do *b*, což je *SPOR*.

(3) ⇒ (1) Víme, že *G* je souvislý.
G je bez kružnice.
Pro spor, ať *G* má kružnici a
e budiž libovolná hrana této kružnice.
Pak $G \setminus e$ je souvislý, což je *SPOR* s minimální souvislostí.

$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ máme nyní dokázáno.

(4) ⇒ (1) Víme, že *G* je bez kružnice.
G je souvislý.
Pro spor ať existují $u, v \in V$ taková, že z *u* do *v* není cesta.
Označíme $\{u, v\} = e \notin E$.
Pak $G + e$ nemůže mít kružnici.

(1) ⇒ (4) Víme, že *G* je bez kružnice.
Pro spor ať existuje $e' \notin E$ takové, že $G + e'$ nemá kružnici.
V *G* ale existuje cesta z *u* do *v*.
Ta spolu s *e'* tvoří kružnici, *SPOR*.

(1) ⇒ (5) a (6) Stačí dokázat $|V| = |E| + 1$.
Dokážeme matematickou indukcí dle $n = |V|$.
(1) pro $n = 1$ je $|V| = 1, |E| = 0 \Rightarrow 1 = 0 + 1$ ...ok.
(2) pro $n \geq 2$ platí, že existuje list $v \in V : deg(v) = 1$, takže $G \setminus v$ je strom.
Indukční předpoklad: $|V_{G \setminus v}| = |E_{G \setminus v}| + 1$.
Z toho plyne, že $|E_{G \setminus v}| = n - 2$ a
tedy $n - 1 = (n - 2) - 1$.
Potom platí, že $|E_G| = (n - 2) + deg(v) = n - 1$. Dokázáno.

(5) ⇒ (1) Pro spor, ať *G* je souvislý, ale obsahuje kružnici.
Pak existuje $e \in E$ taková, že $G \setminus e$ je souvislý.
Opakujeme vynechávání hran, dokud je graf souvislý.

Zbyde $E' \subseteq E$, přičemž $|E'| < |E|$ a
$G=(V, E')$ souvislý graf bez kružnice.
Protože takovýto graf je strom, platí $|V|=|E'|+1$,
z předpokladu ale víme, že $|V|=|E|+1$.
Z toho plyne, že $|E'|=|E|$, což je spor.

(6) ⇒ (1) Pro spor, ať *G* není souvislý.
Pak existuje $e'' \notin E$ takové, že $G+e''$ nemá kružnici. (a samozřejmě $|E''|>|E|$).
Opakujeme přidávání hran, dokud graf nemá kružnici.
Pak máme $E'' \supset E$ a
$G=(V, E'')$ nemá kružnici a je souvislý.
Z toho plyne, že $|V|=|E''|+1$,
z předpokladu ale $|V|=|E|+1$,
takže $|E''|=|E|$, což je *SPOR*.

Dokázána vzájemná ekvivalence tvrzení (1) až (6).

Důsl.: Platí ekvivalence, že
G je les s komponentami souvislosti právě když neobsahuje kružnici.

Def: **Kostra souvislého grafu** $G=(V, E)$ je
podgraf $T(V, E')$, který je stromem.
$\kappa(G)$ se rovná počtu koster grafu *G*.

Věta: **Cayleyho formule**
Pro $n \geq 2$ je $\kappa(K_n)=n^{n-2}$.
Přeformulování: $\kappa(K_n)$ můžeme chápat jako počet různých stromů v množině $\{1, \ldots, n\}$.

Důkaz: Použijeme POVÝKOS (viz. níže) a dostaneme strom $T=(V, E)$
- Jeden vrchol označíme jako kočen, na začátku nemáme žádnou hranu.
- Postupně očíslujeme hrany.
- Výsledkem je zobrazení $c: E \to \{1, \ldots, n-1\}$.
- Ptáme se, kolik existuje takových objektů?
- Hrany stromu si označíme šipkou, aby směřovaly ke kořenu.
- V k-tém kroku je přidání *k-1* šipek, počet komponent grafu je $n-(k-1)$ (v každém kroku spojíme dvě komponenty).
- Chceme přidat k-tou šipku mezi vrcholy různých komponent.

☼: Z každého vrcholu mimo kořene vede jedna šipka směrem ven (během výstavby je to ≤ 1 šipka).
Každá přidaná hrana musí začínat ve vrcholu, odkud zatím nic nevede.

Tedy: 1. krok 1. šipka $n \cdot (n-1)$ možností (nevolíme kořen, ten vyjde sám)
k. krok *k.* šipka $n \cdot (n-k)$ možností ($n-(k+1)$ komponent souvislosti – v každé je vrchol, ze kterého nevede šipka)
(*k.* šipka končí kdekoliv, začíná v jiné komponentě ve vrcholu bez šipky ven (v každé komponentě je jen jeden takový).)

Celkových možností povýkos je $\prod_{k=1}^{n-1} n \cdot (n-k) = n^{n-1} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n-k) = n^{n-1} \cdot (n-1)!$.

Druhé počítání:
- Vezměme strom $\{1, \ldots, n\}$.
- Zvolíme kořen $r \in V$.
- Očíslujeme hrany $c: E \to \{1, \ldots, n\}$ bijekcí jako v POVÝKOSu.

Pak máme $\kappa(K_n) \cdot (n-1)! \cdot n$.

Důsledek: $n^{n-1} \cdot (n-1)! = \kappa(K_n) \cdot n \cdot (n-1)!$, z čehož plyne:
$\kappa(K_n)=n^{n-2}$. Dokázáno.

Postup: Postup výstavby kořenového stromu, **POVÝKOS**.
Máme *n* vrcholů.
(1) Zvolíme kořen (máme *n* možností).
(2) Přidáme hranu e_1 $c(e_1)=1$, aby vznikl strom.
pokračujeme do e_{n-1} $c(e_{n-1})=n-1$.
Potom na konci máme strom a zobrazení $c: E \to \{1 \ldots, n-1\}$.

Úloha: Mějme $n=|V| \geq 3$,
e hranu K_n.
Kolik koster má úplný graf po vynechání *e*, $\kappa(K_n \setminus e)$?

Řešení: Víme, že $\kappa(K_n)=n^{n-2}$.

Vezměme *T*, kostru grafu K_n :

Možnosti: $e \notin E_T$, pak je *T* kostra $K_n \setminus e$.

Odvodíme $\kappa(K_n) - \kappa(K_n \setminus e)$.

$e \in E_T$, ostatní případy (b)

Pro (b) spočteme počet dvojic (T, e) , kde *T* je kostra K_n a $e \in E_T$.

Vezmeme libovolnou kostru $n^{n-٢}$,

její hranu $n-١$ (takže máme $(n-١) \cdot n^{n-٢}$ způsobů výběru kostry a její hrany),

jinou hranu $\binom{n}{٢} = \frac{n \cdot (n-١)}{٢}$ a

kostru, která tuto hranu obsahuje, tedy

$\kappa(K_n, e)$ (takže máme $\frac{n \cdot (n-١)}{٢} \cdot \kappa(K_n, e)$ způsobů výběru).

Pak platí, že: $(n-١) \cdot n^{n-٢} = \frac{n \cdot (n-١)}{٢} \cdot \kappa(K_n, e)$,

$\kappa(K_n, e) = ٢ \cdot n^{n-٣}$,

$\kappa(K_n \setminus e) = \kappa(K_n) - \kappa(K_n, e)$,

a máme výsledek: $\kappa(K_n \setminus e) = n^{n-٢} - ٢ \cdot n^{n-٣} = (n-٢) \cdot n^{n-٣}$.

Rovinné grafy

Náčrty definic:

Oblouk je obor hodnot prosté spojité funkce $\phi \; \underbrace{\langle ٠, ١ \rangle}_{\text{koncové body oblouku}} \to \mathbb{R}^٢$

Topologická kružnice je obor hodnot spojité funkce $\Psi < ٠, ١ > \to \mathbb{R}^٢$ a
$\Psi(t) = \Psi(s) \Rightarrow (\{s, t\} = \{٠, ١\} \cup s = t)$.

Rovinné nakreslení grafu $G = (V, E)$,

kde $(V = \{v_١, v_٢, \ldots, v_n\}, E = \{e_١, e_٢, \ldots, e_n\})$,

je $f : V \to \mathbb{R}^٢$ prosté zobrazení a

$F : E \to \{\varphi_١, \ldots, \varphi_n\}$ tak, že $e_i = \{x_i, y_i\} \Rightarrow \{\varphi_i(٠), \varphi_i(١)\} = \{f(x_i), f(y_i)\}$.

☼: Každý rovinný graf se dá nakreslit úsečkami.

Def: Graf je **rovinný**, pokud existuje nějaké jeho rovinné nakreslení.

Def: **Stěna** rovinného nakreslení grafu je komponenta souvislosti grafu $\mathbb{R}^٢ \setminus X$, kde *X* jsou všechny body nakreslení grafu.

Věta: **Jordanova, o kružnici**
Topologická kružnice dělí rovinu na dvě části (vnitřní a vnější).

Def: Nechť $G = (V, E)$ je graf a
$v \in V$ je vrchol.
Potom je *v* **izolovaný**, jestliže $deg(v) = ٠$.

Tvrz.: **Eulerův vzorec**
Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf,

s je počet stěn nějakého rovinného nakreslení *G*.

Potom $|V| - |E| + s = ٢$.

Důkaz: Vyjádřeme $s = ٢ - (|V| - |E|) = ٢ + (|E| - |V|)$.

Postupujeme matematickou indukcí dle $|E| - |V| \geq -١$:

(1) $|E| - |V| = -١$, tedy *G* je strom.

Pak má každé rovinné nakreslení *G* právě jednu stěnu.

$s = ١ \Rightarrow ١ = ٢ - ١ = ١$ … ok.

(2) $|E| - |V| \geq ٠$, tedy $|E| \geq |V|$, tedy *G* není strom, protože obsahuje kružnici.

Existuje $e \in E$ taková, že $G \setminus e$ je souvislý.

Pak $|E_{G \setminus e}| - |V_{G \setminus e}| = (|E_G| - |V_G|) - ١$.

Indukční předpoklad pro $G \setminus e$:

$s_{G \setminus e} = ٢ + (|E_{G \setminus e}| - |V_{G \setminus e}|) = ١ + (|E| - |V|)$.

Potom $s_G = s_{G \setminus e} + ١ = ١ + (|E| - |V|) + ١ = ٢ + (|E| - |V|)$.

Důsl.: Každé rovinné nakreslení daného (souvislého) grafu má stejný počet stěn.

Tvrz.: Nechť $G=(V,E)$ je rovinný graf,
$|V|\geq 3$.

Potom (1) $|E|\leq 3\cdot|V|-6$ (počet hran je menší / roven trojnásobku počtu vrcholů - 6)

(2) $K_3\not\subseteq G\Rightarrow|E|\leq 2\cdot|V|-4$ (pokud graf neobsahuje trojúhelník, je počet jeho hran menší / roven dvojnásobku počtu vrcholů – 2)

Důkaz: *BÚNO* lze předpokládat, že graf je souvislý (přidání hrany neporuší rovinnost grafu).

Víme, že $|V|-|E|+s=2$.

(1) Nechť *f* je stěna rovinného nakreslení *G*.

$deg(f):=$ počet hran na hranici stěny *f* (s násobností, každá hrana započtena dvakrát v jedné stěně nebo ve dvou různých stěnách)

Pak platí a

zároveň $\sum_{f\ \text{stěna}} deg(f)\geq 3\cdot s$.

Z toho plyne $2\cdot|E|\geq 3\cdot s$. Použijeme $|V|-|E|+s=2$ a

dostaneme $\frac{2}{3}\cdot|E|\geq s=2+|E|-|V|\Rightarrow 2\cdot|E|\geq 6+3\cdot|E|-3\cdot|V|\Rightarrow 3\cdot|V|-6\geq|E|$.

(2) Dokazujeme $K_3\not\subseteq\Rightarrow deg(f)\geq 4$.

Platí $\sum_{f\ \text{stěna}} deg(f)\geq 4\cdot s$ a

tedy $2\cdot|E|\geq 4\cdot s\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot|E|\geq s=2+|E|-|V|\Rightarrow|E|\geq 4+2\cdot|E|-2\cdot|V|\Rightarrow 2\cdot|V|-4\geq|E|$

Úloha: Hledání rovinné **triangulace**.

Mějme $n\geq 3$.

Existuje rovinný graf s n vrcholy a
$3\cdot n-6$ hranami,
kde pro všechny stěny platí $deg(f)=3$ (tedy všechny stěny včerně vnější jsou trojúhelníky)?

Řešení: *G* budiž rovinná triangulace s $n\geq 3$.

Vytvoříme indukcí:

Nechť G' je rovinná triangulace s *n-1* vrcholy,
vytvoříme z ní rovinnou triangulaci *G* s *n* vrcholy dle obrázku:

G je rovinný $\Rightarrow|E|<3\cdot|V|-6$, a pokud

navíc neobsahuje trojúhelník $\Rightarrow|E|<2\cdot|V|-4$.

Důsl.: Nechť $G=(V,E)$ je rovinný graf,
potom mají všechny vrcholy $v\in V$ stupeň $deg(v)\leq 5$.

Pokud navíc $K_3\not\subseteq G$, pak
existuje vrchol $v\in V$

Důkaz: Pro spor, ať mají všechny $v\in V$ alespoň $deg(v)\leq 5$.

Víme, že pro $|V|\geq 3$ platí $|E|\leq 3\cdot|V|-6$.

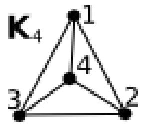
Potom $2\cdot|E|=\sum_{v\in V} deg(v)\geq 6\cdot|V|$

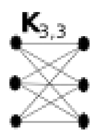
$3\cdot|V|-6\geq|E|\geq 3|V|$, což je *SPOR*.

Pro grafy $K_3\not\subseteq G$:

$2\cdot|E|\leq 4\cdot|V|-8$ a postupujeme analogicky.

Pozn., takto nelze postihnout všechny možné triangulace! (například dvacetistěn).





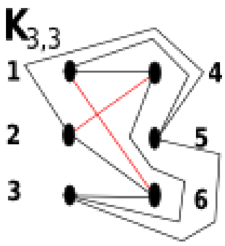
Důsl: K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné grafy a
ani jejich dělení nejsou rovinné grafy.

Důkaz: Pokud se podíváme na znázornění K_4 , zjistíme, že ho ani jinak nelze nakreslit (vždy se jedná pouze o jiné délky hran).

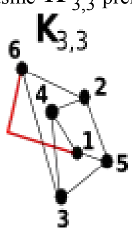
Pokud chceme vytvořit K_5 , tak musíme vycházet z K_4 a to bychom museli protnout jednu z jeho stěn, což v rovinně nejde. SPOR.

Důkaz: Zkusme nakreslit $K_{3,3}$ do rovinny a zjistíme toto:

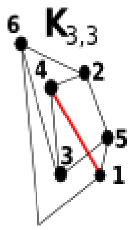
Zkusme $K_{3,3}$ překreslit jinak a to hned dvěmi způsoby:



<=>



<=>



Je vidět, že jedna hrana opět vždy musí protínat stěnu grafu.

Věta: **Kuratovski**

G je rovinný, právě když neobsahuje dělení K_5 ani dělení $K_{3,3}$.
Pozn., pro dokázání rovinnosti grafu je nejvhodnější důkaz obrázkem (oproti vyvrácení rovinnosti – věty).

Barevnost grafů

Def: **Dobré k-obarvení grafu** $G=(V,E)$ je
zobrazení $c: V \to \{1,\dots,k\}$ takové,
že pro všechna $\{u,v\} \in E$ platí $c(u) \neq c(v)$.

☼: K_n nemá *k* obarvení pro $k < n$.

Def: **Barevnost grafu** *G* je $\chi(G) = min\{k \in \mathbb{N}; \exists \text{ k-obarvení } G\}$
Česky: nejmenší *k* takové, že existuje *k*-obarvení grafu. χ je [chí].

☼: Pro $G=(V,E)$ platí, že
$\chi(G) \leq |V|$, právě když *G* je úplný graf.

☼: $\chi(G)=1$, právě když *G* nemá žádné hrany.

Tvrz.: Pro $G=(V,E)$ platí, že
$\chi(G) \leq 2$, právě když *G* je bipartitní.

Důkaz: $\chi(G)=2$ znamená, že existuje 2-obarvení *c* grafu *G*.
Rozdělíme vrcholy do $V_i = \{v \in V; c(v) = i\}; i=1,2$.
Potom pro všechna $e \in E$ platí, že $|e \setminus V_i| = 1$.
G je bipartitní.

Def: Graf $G=(V,E)$ je **d-degenerovaný** $(d \in \mathbb{N})$,
pokud $\forall H \subseteq G \exists v \in V_H : deg(v) \leq d$, tedy
pokud v každém podgrafu $H \subseteq G$ existuje vrchol $v \in V_H$, jehož stupeň není větší než *d*.

☼: Stačí posloupnost $v_1, \dots, v_n$ taková, že
$deg(v_i) \leq d$ v grafu $G \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$.

Tvrz.: Pokud je $G=(V,E)$ d-degenerovaný, pak
$\chi(G) \leq d+1$.

Důkaz: Existuje $v \in V$ takové, že $deg(v) \leq d$.
Matematickou indukcí dle $|V|$:
(1) $|V|=1 : \chi(G)=1$,
(2) $|V| \geq 2$:
Indukční předpoklad: $G \setminus v$ je *d*-degenerovaný, tedy
$\chi(G \setminus v) \leq d+1$.
Z toho plyne, že existuje $c:(d+1)$ -obarvení $G \setminus v$.
Máme-li vrcholy $v_1, \dots, v_k; k \leq d$, které sousedí v *G*.
Pak $\begin{matrix} c(v_1) \\ \vdots \\ c(v_k) \end{matrix} \dots \leq d$ různých hran a
v $\{1, \dots, d+1\}$ zbývá ještě alespoň jeden prvek *i* takový, že $c(v)=i$.

Barevnost rovinných grafů

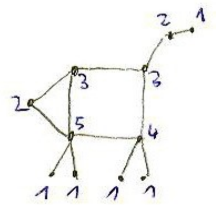
Věta: Mějme $G=(V,E)$ rovinný graf, potom
$\chi(G) \leq 6$.

Důkaz: *G* je rovinný $\Rightarrow$ *G* je 5-degenerovaný,
Potom podgraf $H \subseteq G$ je také rovinný a
existuje $v \in V_h$ takové,že $deg_H(v) \leq 5$.
$\chi(G) \leq 5+1=6$.

Věta: Mějme $G=(V,E)$ rovinný graf, potom
$\chi(G) \leq 5$.

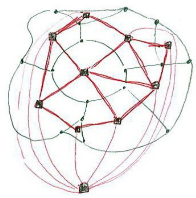
Důkaz: Matematickou indukcí dle $|V|=n$.

(1) Pro $n \leq 5$ tvrzení platí triviálně.
(2) Indukční předpoklad: Každý rovinný graf s nejvýše *n-1* vrcholy lze obarvit pěti barvami.
Víme, že existuje $v \in V$ takové, že $deg(v) \leq 5$.
$G \setminus v$ má *n-1* vrcholů,
dle indukčního předpokladu existuje (dobré) obarvení $c: V \setminus \{v\} \rightarrow \{1, \ldots, 5\}$.
Hledejme $c(v)$ v *G*: jaké barvy byly použity pro sousedy *v*?
Buď existuje $i \in \{1, \ldots, 5\}$, která není použitá pro souseda *v*,
potom $c(v) = i$, rozšíříme obarvení $G \setminus v$ na *G*,
nebo $deg(v) = 5$ a sousedy lze očíslovat na $v_{1,} \ldots, v_5$ tak, že $c(v_i) = i$.



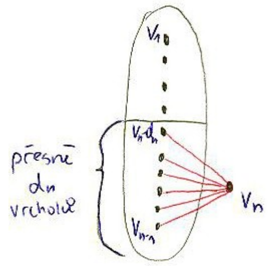
Věta: Mějme $G = (V, E)$ rovinný graf, potom
$\chi(G) \leq 4$.
Důkaz je netriviální.

Def: **Skóre grafu** je posloupnost stupňů jeho vrcholů (uspořádaná vzestupně; možné opakování).



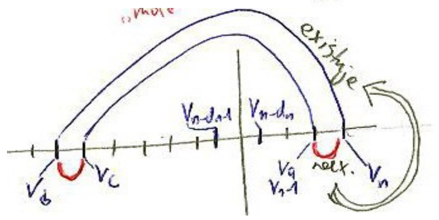
Pozn., **Duální graf** je graf vepsaný do rovinného grafu (např. u barevnosti map).

Věta: **Hašel-Hakim** (viz. Kapitoly z DM str. 131)
Platí ekvivalence, že
posloupnost $d_1, \ldots, d_n$ celých nezáporných čísel (uspořádaná vzestupně) je skóre nějakého grafu.
právě když
posloupnost $d'_1, \ldots, d'_n$ (po přeuspořádání) je skóre nějakého grafu, přičemž
$d'_i = d_i$ pro $i < n - d_n$ a
$d'_i = d_i - 1$ pro $n - d_n \leq i < n$
(škrtneme člen a odečteme jedničku u tolika předchozích členů posloupnosti, kolik byla jeho hodnota).



Důkaz: $\Rightarrow$ Nechť existuje graf *G'* se skóre $d'_1, \ldots, d'_{n-1}$.
Označme vrcholy $v'_1, \ldots, v'_{n-1}$ tak, že $deg_{G'}(v'_i) = d'_i; i = 1, \ldots, n-1$.
Pak přidáme jeden vrchol dle obrázku a
máme *G* takové, že $deg_G(v_i) = d_i; i = 1, \ldots, n$.

$\Leftarrow$



Označme $\mathfrak{g} = \{G; \text{skóre } G \text{ je } d_{1,} \ldots, d_n\}; \mathfrak{g} \neq \emptyset$.

Vezměme $G_0 \in \mathfrak{g}$ takové, že $|N(V_n) \cap \{v_{n-d_n}, v_{n-1}\}| = p$ je minimální.
Pokud $p = d_n$, je důkaz snadný.
Předpokládejme, že $p < d_n$.
Potom existuje $a \in \{n - d_n, \ldots, n-1\}$

Eulerovský graf

Def: Tah *T* **pokrývá** *G*, pokud $E_T = E_G$

Def: Graf $G = (V, E)$ se nazývá **eulerovský**, jestliže
v *G* existuje uzavřený tah, který pokrývá *G*.
(jde nakreslit jednou čarou a *G* neobsahuje izolované vrcholy)

Věta: Mějme graf $G = (V, E)$ bez izolovaných vrcholů.
Pak platí, že *G* je eulerovský, právě když *G* je souvislý a pro všechna $v \in V$ je $deg(v)$ sudý.

Důkaz: $\Rightarrow$ snadné.
$\Leftarrow$ Víme, že $deg(v) \geq 2$ je sudý.
Začneme na libovolném vrcholu a hledáme tah $v_{0,} e_{1,} v_{1,} \ldots$.
Zastavíme se, když se poprvé navrátíme do již navštíveného vrcholu.
Máme pak $v_i = v_j : v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, v_j$.
Položíme $\boldsymbol{T} = \{T \text{ uzavřený tah v } G\} \neq \emptyset$ a
vybereme $T_0 \subseteq \boldsymbol{T}$ takové, že $|E_{T_0}|$ je maximální.
Pokud $|E_{T_0}| = |E_G|$, pak T_0 pokrývá *G* a tím pádem je *G* eulerovský.
$|E_{T_0}| < |E_G|$, pak
existuje $e_0 \in E_G, e_0 \notin E_{T_0}$ takové, že $|e_0 \cap V_{T_0}| \geq 1$ a

$u_0 \in e_{0,} u_0 \in V_{T_0}$.

Najdeme libovolný uzavřený tah $T_1 \in G \setminus T_0$, který obsahuje u_0 .

Takový existuje, neboť všechny vrcholy v $G \setminus T_0$ mají sudý stupeň.

Pokud $E_{T_0} \cap E_{T_1} = \emptyset$, pak $T_0 \cup T_1$ tvoří uzavřený tah v *G* který má hran více než $|E_{T_0}|$, což je *SPOR*.

Jinak existují $u_0 \in e_{0,} v_0 \in V_{T_0}$ a

G je souvislý, tedy existuje cesta z u_0 do v_0 a

e'_0 je prvkem této cesty tak, že $e'_0 \cap V_{T_0} \neq \emptyset$.

Pak $|e'_0 \cap V_{T_0}| = 1$ a $e'_0 \in E_{T_0}$ (toto lze podložit).

Tedy neexistuje $e_0 \in E, e_0 \notin E_{T_0}$ a potom $E_{T_0} > E_G$, což je *SPOR*, a T_0 pokrývá *G*.

Orientovaný graf

Def: **Orientovaný graf** je $\vec{G} = (V, \vec{E})$, kde
$\vec{E} \subseteq V \times V$.

Def: **Souvislost orientovaných grafů**

1) $\vec{G}$ je bez orientace je graf $G = (V, E)$, $E = \{\{u, v\}; (u, v) \in \vec{E} \vee (v, u) \in \vec{E}\}$
2) $\vec{G}$ je **slabě souvislý**, pokud je *G* souvislý (v jednosměrkách pro souvislost připoštíme obousměrné použití).
3) $\vec{G}$ je **silně souvislý**, pokud pro všechna $u, v \in V$ existuje orientovaná cesta z *u* do *v*.

Orientovanou cestou rozumíme posloupnost $v_0 \vec{e}_1 v_1 \vec{e}_2 v_2 \ldots \vec{e}_k v_k$, kde $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ a $v_i \neq v_j \; pro \, i \neq j$.

Def: Orientovaný graf $\vec{G} = (V, \vec{E})$ je **eulerovský**, pokud
existuje uzavřený orientovaný tah, který pokrývá $\vec{G}$.

☼: Pokud $\vec{G}$ je silně souvislý, pak $\vec{G}$ je i slabě souvislý. (obráceně samozřejmě neplatí)

Def: Orientovaný graf $\vec{G} = (V, \vec{E})$ je **vyvážený**,
pokud pro všechna $v \in V$ je $deg^{+}(v) = deg^{-}(v)$, přičemž

$deg^{+}(v) = |\{\vec{e} \in E ; \exists x \in V : \vec{e} = (x, v)\}|$ (počet hran, které jdou „do“ *v*) a

$deg^{-}(v) = |\{\vec{e} \in E ; \exists y \in V : \vec{e} = (v, y)\}|$ (počet hran, které jdou „z“ *v*).

Věta: Nechť je $\vec{G} = (V, \vec{E})$ orientovaný graf
bez izolovaných vrcholů
slabě souvislý
vyvážený.

Pak je $\vec{G}$ eulerovský**.**

Důkaz: Stejně jako pro neorientované grafy.

Je-li $\vec{G}$ vyvážený, pak v něm existuje uzavřený tah.

Zvolíme $\vec{T}_0$ maximální uzavřený orientovaný tah.

Pokud existuje $\vec{e}_0 \notin \vec{E}_{\vec{T}_0}, \vec{e}_0 \in \vec{E}_{\vec{G}}$, lze $\vec{T}_0$ prodloužit stejně jako při neorientované variantě, což je *SPOR*.

Tedy $\vec{E}_{\vec{T}_0} = \vec{E}_{\vec{G}}$ a $\vec{G}$ je eulerovský.

Další k teorii grafů

Věta: Nechť $G = (V, E)$ je graf takový, že
$|V| = 2 \cdot n$ a
$|E| \geq n^2 + 1$.

Pak *G* obsahuje kružnici, $K_3 \subseteq G$.

Důkaz: Matematickou indukcí dle *n*.

(1) $n = 2$: $|V| = 4, |E| \geq 5$ a platí, že $G \simeq K_4$ nebo $G \simeq K_4 \setminus e ; K_3 \subseteq G$.

(2) $n \geq 3$: Indukční předpoklad je, že pro $G' = (V', E')$ platí $|V'| = 2 \cdot (n-1) ; |E'| = (n-1)^2 + 1 \Rightarrow K_3 \subseteq G'$.

Mějme $G' = (G \setminus u) \setminus v$.

Pokud $|E_{G'}| \geq (n-1)^2 + 1$, pak $K_3 \subseteq G' \subseteq G$

Důsl.: Minimální počet hran grafu bez kružnice s *2n* vrcholy...

Def: **Částečné uspořádání** je

(a) binární relace $(X, \leq)$, která je

reflexivní: $\forall\, x \in X : x \leq x$,

tranzitivní: $\forall\, x, y, z \in X : (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ a

antisymetrická: $\forall\, x, y \in X : (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$.

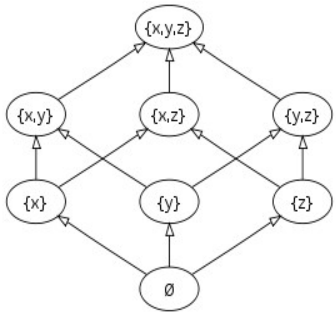
(b) lineární uspořádání: $\forall\, x, y \in X : (x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Pojem: Hasselho diagram

$(X, \leq)$ orientovaný graf.

Při kreslení vynecháme smyšky a hrany plynoucí z tranzitivity.

Příklad, $(2^{\{x, y, z\}}, \subseteq)$:



Tvrz.: Mějme $n \in \mathbb{N}$,

posloupnost $a_{1,} \ldots, a_{(n-1)^2+1}$ různých čísel z $\mathbb{R}$.

Pak existují $i_1 < \ldots < i_n$ taková, že

$a_{i_1} < \ldots < a_{i_n}$ anebo $a_{i_1} > \ldots > a_{i_n}$.

Důkaz: Mějme $i \in \{1, \ldots, (n-1)^2+1\}$,

r_i délku maximální rostoucí posloupnosti začínající a_i,

k_i délku maximální klesající posloupnosti začínající a_i.

Pro $i \neq j$ *BÚNO* předpokládejme $i < j$ a $\begin{matrix} a_i < a_j : r_i > r_j \\ a_i > a_j : k_i > k_j \end{matrix} \ldots (r_i, k_i) \neq (r_j, k_j)$.

Pro spor předpokládjeme, že neexistuje rostoucí posloupnost délky *n*, takže $1 \leq r_i, k_i \leq n-1$.

r_i může nabývat $n-1$ různých hodnot a

k_i může nabývat $n-1$ různých hodnot, dohromady tedy

r_i, k_i může nabývat $(n-1)^2$ různých hodnot.

Máme ale $(n-1)^2+1$ různých členů.

Tedy existují $i \neq j$ taková, že $(r_i, k_i) = (r_j, k_k)$, což je *SPOR*.

Teorie pravděpodobnosti

Def: **Pravděpodobnostní prostor** je $(\Omega, \Im, P)$, kde je

Ω množina elementárních jevů (všech možných výsledků),
$A \subseteq \Omega$ jev,
$\Im \subseteq 2^{\Omega}$ množina náhodných jevů,
$P : \Im \to \langle 0,1 \rangle$ pravděpodobnostní míra a

při platnosti následujících podmínek:

$$\emptyset \in \Im$$
$$A \in \Im \Rightarrow \Omega \setminus A = \bar{A} \in \Im$$
$$A_{1,} A_{2,} \ldots \in \Im \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$$
$$P[\emptyset] = 0 ; P[\Omega] = 1$$
$$\forall i, j \forall A_i, A_j \in \Im : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$
$$P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i] .$$

Def: **Diskrétní pravděpodobnostní prostor** je pravděpodobnostní prostor, kde

Ω je konečná,
$\Im = 2^{\Omega}$ a
P určíme pro $\{\omega\}, \omega \in \Omega$ následovně:
$A = \{\omega_{1,} \ldots, \omega_n\}$, kde $\{\omega_1\} \ldots \{\omega_n\}$ jsou disjunktní,

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[\{\omega_i\}] .$$

Pozn.: Píšeme také $P[\{\omega\}] \equiv P[\omega]$.

Def: **Uniformní pravděpodobnostní prostor** je takový, kde

Ω je konečná a

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} .$$

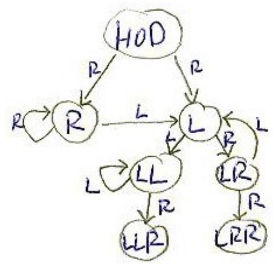
Příklad: Nekonečná posloupnost hodů mincí.

$\Omega = \{\underbrace{R}_{\text{rub}}, \underbrace{L}_{\text{líc}}\}$.

Zajímá nás, zda je pravděpodobnější, že dříve padne posloupnost *LLR* nebo *LRR*.
Dle obrázku (klíčový je krok *L* z *LL* a *LR*).

$$P[LLR] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{2} + \ldots$$
$$P[LRR] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}^2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots .$$

Takže $P[LLR] > P[LRR]$.



Def: Mějme $A, B \in \Im$.

Pak **podmíněná pravděpodobnost** je $P[A|B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]}$ pro $P[B] > 0$.

☼: Platí, že pokud $B_{1,} \ldots, B_n$ jsou disjunktní jevy $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$,

potom $P[A] = P[A|B_1] \cdot P[B_1] + \ldots + P[A|B_n] \cdot P[B_n]$.

Def: Jevy *A*, *B* jsou **nezávislé**, pokud $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$.

☼: Jsou-li jevy *A*, *B* nezávislé, pak $P[A|B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{P[A] \cdot P[B]}{P[B]} = P[A]$.

Def: Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou **nezávislé**,

pokud pro všechna $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, $I \neq \emptyset$ platí $P[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} P[A_i]$.

Příklad: Máme $\Omega = \{L, R\}^{10}$ (posloupnost deseti hodů mincí).

$A_1 = \{\text{prvních 5 hodů } L\}$,

$A_2 = \{\text{v 6. hodu } R\}$,

$A_3 = \{\text{v 6. až 10. hodu padl sudý počet } L\}$.

Jevy A_1, A_2, A_3 jsou navzájem nezávislé.

Příklad: Náhodná permutace $\{1, \dots, 10\}$.

$A_1 = \{\pi, \pi(1) = 1\}$ $\quad P[A_1] = \frac{9!}{10!} = 0{,}1$,

$A_2 = \{\pi, \pi(2) = 2\}$ $\quad P[A_2] = 0{,}1$.

Ale $P[A_1] \cdot P[A_2] = \frac{1}{100} \neq \frac{1}{90} = \frac{8!}{10!} = P[A_1 \cap A_2]$,

takže A_1, A_2 nejsou nezávislé.

Příklad: Mějme $A_i = \{\text{padlo } i\};\ i = 1, \dots, 6$.

$P[\text{sudé}] = P[s|1] \cdot P[1] + \dots + P[s|6] \cdot P[6] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Příklad: HIV test, H je HIV,
T je test.

Víme $P[H] = 0{,}001$,

$P[T|H] = 0{,}95$,

$P[\bar{T}|\bar{H}] = 0{,}95$.

$P[H|T] = \frac{P[H \cap T]}{P[H]}$

$P[T|H] = \frac{P[T \cap H]}{P[H]} \Rightarrow P[T \cap H] = P[T|H] \cdot P[H] = 0{,}95 \cdot 0{,}001 = 0{,}00095$

$P[T] = P[T|H] \cdot P[H] + P[T|\bar{H}] \cdot P[\bar{H}] = 0{,}95 \cdot 0{,}001 + 0{,}05 \cdot 0{,}999 = \mathbf{0{,}0509}$.

Takže pravděpodobnost, že při pozitivním testu je člověk nakažený HIV, je cca 2%.

Def: **Součin pravděpodobnostních prostorů** definujeme jako

$$(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1) \times (\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2) = (\Omega, 2^{\Omega}, P),$$

kde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ a

$$P[\{(\omega_1, \omega_2)\}] = P_1[\{\omega_1\}] \cdot P_2[\{\omega_2\}].$$

Příklad: Turnaj jako orientace K_n.

Pro každé dostatečně velké *n* existuje turnaj (velikosti *n*) takový, že

pro všechna x_1, x_2, x_3 existuje $y \to x_1, y \to x_2, y \to x_3$, který je všechny porazil.

Důkaz: Náhodná orientace K_n.

x_1, x_2, x_3 je trojice, $\quad P[y \to x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

a tedy $\quad P[y \to \bar{x_1}, x_2, x_3] = \frac{7}{8}$.

Pak $P[\forall y : y \to \bar{x_1}, x_2, x_3] = (\frac{7}{8})^{n-3} = P[x_1, x_2, x_3 \text{špatná}]$.

Trojici lze vybrat $\binom{n}{3}$ způsoby.

$P[\text{existuje špatné } x_1, x_2, x_3] \leq \binom{n}{3} \cdot (\frac{7}{8})^{n-3}$

$P[1 \text{ ze } 2 \text{ špatné}] = 1 - P[2 \text{ ok}] = 1 - (\frac{1}{8})^2 \leq 2 \cdot (1 - \frac{1}{8})^2$

Def: **Náhodná** reálná **veličina** na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ je

funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ taková,

že $\quad f^{-1}((a, b)) \in \mathfrak{I}$ pro všechna $a < b \in \mathbb{R}$.

V případe $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ pak může být *f* libovolná.

Def: **Střední hodnota** je $E[f]=\sum_{\omega\in\Omega} P[\{\omega\}]\cdot f(\omega)$ pro Ω spočetná.

Věta: **Linearita střední hodnoty**

Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$,

f, g náhodné veličiny,

$\alpha\in\mathbb{R}$.

Potom platí:

(1) $E[\alpha]=\alpha$

(2) $E[\alpha\cdot f]=\alpha\cdot E[f]$

(3) $E[f+g]=E[f]+E[g]$

Důkaz:

(1) $E[\alpha]=\sum_{\omega\in\Omega}(P[\{\omega\}]\cdot\alpha)=\alpha\cdot\sum_{\omega\in\Omega}P[\{\omega\}]$

(2) $E[\alpha\cdot f]=\sum_{\omega\in\Omega}(P[\{\omega\}]\cdot\alpha\cdot f(\omega))=\alpha\cdot E[f]$

(3) analogicky.

Pozor, obecně neplatí $E[f\cdot g]=E[f]\cdot E[g]$.

Def: **Indikátor jevu** A je $\chi_A(\underbrace{\omega}_{\omega\in\Omega})=\begin{matrix}1:\omega\in A\\ 0:\omega\notin A\end{matrix}$.

Platí, že $E[\chi_A]=P[A]$ a

$$E[\chi_A]=\sum_{\omega\in\Omega}\chi_A(\omega)\cdot P[\{\omega\}]=\sum_{\omega\in A}P[\{\omega\}].$$

Příklad: Mějme $n\in\mathbb{N}$,

$(\{0,1\}^n, 2^{\Omega}, \text{uniformní})$,

(a) náhodnou veličinu $f_n=$počet 1 v posloupnosti

$$E[f_n]=\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{2^n}\cdot f_n(\omega)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\cdot k\cdot\binom{n}{k}=\frac{n}{2^n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{(k-n)!}\cdot(n-k)!=\frac{n}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}}_{=2^{n-1}}=\frac{n}{2}$$

(b) $A_i=\{\text{na pozici } i \text{ je } 1\}$

Pak $\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(\omega)=f_n(\omega)$

$E[\chi_{A_i}]=\frac{1}{2}$

$E[\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}]=\sum_{i=1}^{n\cdot E}[\chi_{A_i}]=\frac{n}{2}$

Def: Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ a náhodnou veličinu *f*.

Distribuční funkce je $F:\mathbb{R}\to\langle 0,1\rangle$ taková,

že $F(z)=P[\{\omega\in\Omega; f(\omega)\leq z\}]=P[f\leq z]$.

Def: Náhodné veličiny *f, g* jsou na $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ **nezávislé**,

pokud pro všechna $a, b\in\mathbb{R}$ jevy $f\leq a$ a $g\leq b$ jsou nezávislé.

Potom platí také $E[f\cdot g]=E[f]\cdot E[g]$.

Def: **Rozptyl** je $Var[f]=E[(f-E[f])^2]=???$.

Příklad:

Cena domu	10^7
Pravděpodobnost vyhoření v roce	10^{-4}
Střední hodnota ztráty z vyhoření	$10^{-4}\cdot 10^7+(1-10^{-4})\cdot 0=10^3$

Tedy, vyplatí se pojistit dům, pokud je pojistné nižší než 10^3 (ze statistického hlediska).

$Var[\text{ztráta z vyhoření}]=10^{-4}\cdot(10^7)^2+(1-10^{-4})\cdot(0-10^3)^2\approx 10^{10}+\ldots\approx 10^{10}$

Věta: **Markovova nerovnost**

Nechť $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ je pravděpodobnostní prostor,

f nezáporná veličina,
$t \in \mathbb{R}\,;\, t \geq 1$.

Pak $P[f \geq t \cdot E[f]] \leq \frac{1}{t}$.

Důkaz: $E[f] = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) \cdot P[\{\omega\}] =$

$= \sum_{\omega \in \Omega \setminus A} f(\omega) \cdot P[\{\omega\}] + \sum_{\omega \in A} f(\omega) \cdot P[\{\omega\}] \geq$

$\geq 0 + a \cdot P[A] = a \cdot P[f \geq a]$.

Položíme $a \in \mathbb{R},\, a \geq 0 : A = \{\omega ; f(\omega) \geq a\}$

Platí $\sum_{\omega \in A} f(\omega) \cdot P[\{\omega\}] \geq \sum_{\omega \in A} a \cdot P[\{\omega\}] = a \cdot P[A]$

Volme $a = t \cdot E[f]$,

pak $E[f] \geq t \cdot E[f] \cdot P[f \geq t \cdot E[f]]$

$\frac{1}{t} \geq P[f \geq t \cdot E[f]]$.

Věta: Čebyševova nerovnost

Nechť $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ je pravděpodobnostní prostor,
f náhodná veličina,
$a \in \mathbb{R}\,;\, t \geq \sqrt{Var[f]} > 0$.

Potom $P[|f - E[f]| \geq a] \leq \frac{Var[f]}{a^2}$.

Důkaz: Položme $g = (f - E[f])^2$,

pak $E[g] = Var[f]$.

Markov pro $t \geq 1$: $P[g \geq t \cdot E[g]] \leq \frac{1}{t}$

nebo $t = \frac{a^2}{Var[f]}$.

Levo:

$P[(f - E[f])^2 \geq t \cdot Var[f]] =$

$= P[(f - E[f])^2 - \frac{a^2}{Var[f]} \cdot Var[f]] =$

$= P[(f - E[f])^2 \geq a^2] =$

$= P[|f - E[f]| \geq a]$

Pravo: $\frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{a^2}{Var[f]}} = \frac{Var[f]}{a^2}$